XXXIX Турнир имени М. В. Ломоносова 25 сентября 2016 года

Конкурс по математике. Ответы и решения

(предварительная версия от 05.10.2016)

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

1. (6–7) Шарик и Матроскин надоили 10 литров молока, разлили его по двум вёдрам и понесли домой. Шарик устал и перелил часть молока из своего ведра в ведро Матроскина. От этого у Шарика молока стало втрое меньше, а у Матроскина — втрое больше. Сколько молока стало у Матроскина?

Ответ. $7,5$ литров.

Решение. Пусть Шарик, прежде чем перелить молоко Матроскину, перельёт его в отдельный бидон. По условию, если добавить это молоко Шарику или Матроскину, то у того станет втрое больше молока. Значит, сейчас у Шарика и Матроскина молока поровну, а в бидоне молока вдвое больше, чем у каждого из них.

То есть в бидоне сейчас половина всего имеющегося молока: $10/2 = 5$ литров, а у Шарика и Матроскина — по $5/2 = 2{,}5$ литров. Поэтому в конце у Матроскина стало $2{,}5+5=7{,}5$ литров.

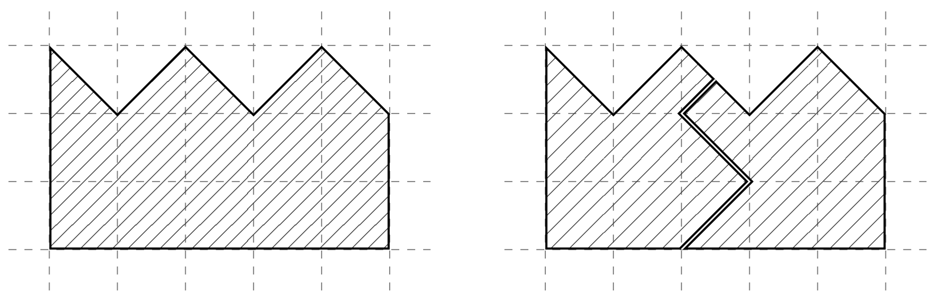
2. (6–7) Замените буквы цифрами (все цифры должны быть различными) так, чтобы получилось верное равенство:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} : \mathbf{C} + \mathbf{D} : \mathbf{E} : \mathbf{F} + \mathbf{G} : \mathbf{H} : \mathbf{I} = 1.$$

Ответ. Например, $2 : 1 : 4 + 9 : 3 : 6 + 0 : 5 : 7 = 1$, или $5 : 4 : 3 + 7 : 6 : 2 + 0 : 8 : 9 = 1$. Есть и много других примеров, в которых одно из слагаемых равно нулю, а также единственный пример, в котором все слагаемые ненулевые: $1 : 3 : 6 + 5 : 8 : 9 + 7 : 2 : 4 = 1$.

Комментарий. Первое решение найдено из желания получить $1/2 + 1/2 + 0$. Второе — из желания сделать дроби с одинаковым знаменателем, сумма числителей которых также равна этому знаменателю. Решение без нулевых слагаемых найдено с помощью компьютера.

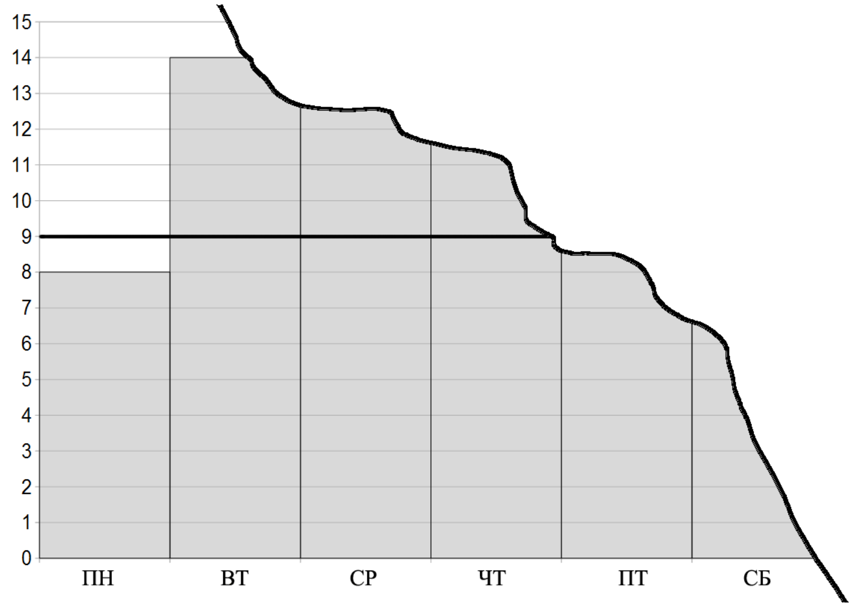
3. (6–8) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке слева, на две равные части.



Ответ. См. рис. справа.

Комментарий. Как это часто бывает в задачах на разрезание, решение может быть проще найти, если 1) посчитать, какую площадь должна иметь каждая часть; 2) задуматься над тем, каким движением будут совмещаться две равные части.

4. (8–9) Мальвина всю неделю учила Буратино писать. Она изобразила на диаграмме, сколько букв написал Буратино за каждый из семи дней. Черта на диаграмме показывает среднее число букв (оно равно 9). Буратино оторвал кусок диаграммы, как показано на рисунке. Сколько букв он написал в воскресенье?



Ответ. 0 букв.

Решение. Заметим, что всего за неделю Буратино написал $7 \times 9 = 63$ буквы. Из диаграммы видно, что в среду написано не менее 13 букв, в четверг — не менее 12, в пятницу — не менее 9, а в субботу — не менее 7. Тогда суммарно выходит не менее $8 + 14 + 13 + 12 + 9 + 7 = 63$ букв. Значит, других букв нет, т. е. в эти дни Буратино написал ровно 13, 12, 9 и 7 букв соответственно, а в воскресенье он написал 0 букв.

5. (8–9) В спортивном клубе проходит первенство по теннису. Проигравший партию выбывает из борьбы (ничьих в теннисе не бывает). Пару для следующей партии определяет жребий. Первую партию судил приглашённый судья, а каждую следующую партию должен судить член клуба, не участвующий в ней и не судивший ранее. Могло ли так оказаться, что очередную партию судить некому?

Ответ. Нет.

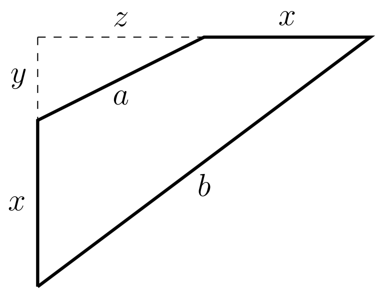
Решение. Пусть до нашей партии прошло m матчей. Тогда из первенства выбыло m членов клуба (по одном проигравшему из каждого матча), а побывало в роли судьи $m - 1$ членов клуба (одну партию судил приглашённый судья) — то есть на одного человека меньше.

Значит, раз уж для партии нашлось 2 невыбывших игрока, то есть хотя бы 3 несудивших члена клуба, хотя бы один из которых в этой партии не играет.

6. (9–11) В выпуклом четырёхугольнике две противоположные стороны равны и перпендикулярны, а две другие равны a и b. Найдите его площадь.

Ответ. $\frac{b^2-a^2}{4}$ (где $b > a$).

Алгебраическое решение. Пусть $b > a$. Обозначим длину двух равных сторон через x. Продолжим их до пересечения и обозначим длины двух получившихся коротких отрезков через y и z.



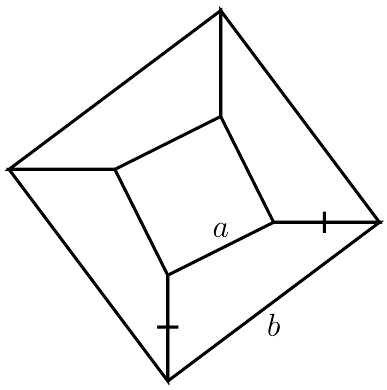
Площадь исходного четырёхугольника есть разность площадей двух прямоугольных треугольников: с катетами $(x+y)$ и $(x+z)$ и с катетами y и z. Поэтому она равна

$$\frac{(x+y)(x+z)-yz}{2}=\frac{x^2+xy+xz}{2}.$$

По теореме Пифагора $y^2+z^2=a^2$, $(x+y)^2+(x+z)^2=b^2$. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{2x^2+2xy+2xz}{4}=\frac{(x+y)^2+(x+z)^2-y^2-z^2}{4}=\frac{b^2-a^2}{4}.$$

Геометрическое решение (набросок). Из 4 таких многоугольников можно сложить квадрат со стороной b из которого вырезан квадрат со стороной a (см. рис. ниже). Поэтому площадь одного многоугольника равна $\frac{b^2-a^2}{4}$.



Замечание. Утверждение остаётся верным, даже если отказаться от условия выпуклости.

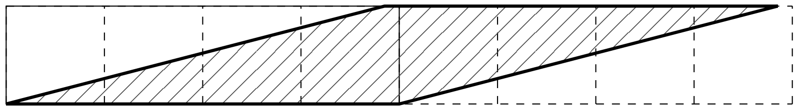
7. (10–11) Имелось 2016 чисел, ни одно из которых не равно нулю. Для каждой пары чисел записали их произведение. Докажите, что среди выписанных произведений не менее трети положительны.

Решение. Пусть среди этих чисел было n отрицательных. Тогда было выписано $n(2016-n)\leqslant\left(\frac{2016}{2}\right)^2$ отрицательных произведений. А всего было выписано $2016\cdot 2015/2$ произведений. То есть доля отрицательных произведений не больше чем $\frac{2016^2/4}{2016\cdot 2015/2}=\frac{2016}{2015\cdot 2}<\frac{2}{3}$, а значит, положительных не менее трети.

8. (10–11) Легко оклеить поверхность куба шестью ромбами, а именно шестью квадратами. А можно ли оклеить поверхность куба (без щелей и наложений) менее чем шестью ромбами (не обязательно одинаковыми)?

Ответ. Можно.

Решение. Заметим сначала, что поверхность единичного куба можно разбить на два квадрата 1×1 (верхняя и нижняя грани) и колечко высоты 1 и длины 4 (боковые грани). Разрежем это колечко по отрезку, соединяющему его верхнюю и нижнюю окружности, и имеющему длину 4. Получится ромб со стороной 4.



То есть поверхность куба оклеена 3 ромбами — двумя квадратами со стороной 1 и одним ромбом со стороной 4 и высотой 1.

Замечание. Похожим образом можно оклеить поверхность куба 4 ромбами (двумя квадратами со стороной 1 и двумя ромбами со стороной 2 и высотой 1) или 5 ромбами.

Вариант подготовили: А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, И. Р. Высоцкий, Т. В. Казицына, А. А. Марачев, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, И. В. Раскина, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов, И. В. Ященко.