1 (7–8).

Пусть плотность золота равна $\rho_з$, плотность серебра – $\rho_с$, масса короны – m (должна быть равна массе выданного золота, иначе царь сразу обнаружит хищение), масса золота, которое мастер собирается заменить серебром – Δm. Чем больше золота мастер заменит серебром, тем меньше будет плотность сплава, потому что плотность серебра меньше плотности золота. Минимальное значение плотности сплава, которое оставляет мастера в безопасности – $0{,}95\rho_з$ (на 5% меньше плотности чистого золота – Архимед не сможет заметить такое отличие с помощью своих инструментов). С другой стороны, плотность равна массе тела, деленной на его объем. Поскольку объем золота в сплаве равен $(m - \Delta m)/\rho_з$, а серебра $\Delta m/\rho_с$, то отсюда получаем уравнение, определяющее максимальную массу золота, которую может присвоить мастер:

$$0,95\rho_з = \frac{m}{\frac{m-\Delta m}{\rho_з} + \frac{m}{\rho_с}}$$

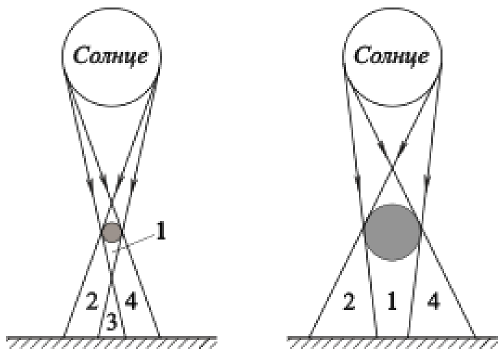
В это уравнение можно подставить численные данные и получить ответ. А можно решить в общем виде и получить формулу:

$$\Delta m = \frac{\rho_с}{19(\rho_з - \rho_с)} m$$

Подставив числа, получаем: $\Delta m \approx 0,126$ кг.

2 (7–8).

На рисунках изображены Солнце, поверхность Земли и препятствия для солнечного света (провод (а) или фонарный столб (б)). Рисунки, разумеется, условные – Солнце на самом деле на много порядков больше и находится неизмеримо дальше от Земли, но эти неточности в данном случае неважны. На рисунках проведены так называемые *крайние лучи* света, идущие от Солнца. Из их построения видно, что в область 1 за препятствием не может попасть свет ни от одной точки Солнца. Это – области *полной тени*. В области 2, 3 и 4 свет Солнца попадает, но не от всех его точек. Это области *полутени*. Во все остальные части пространства Солнце светит всеми своими точками.



а) б)

При этом видно, что область полной тени в данном случае является ограниченной – по мере удаления от источника она становится все тоньше, пока на некотором расстоянии не исчезает совсем. Если препятствие совсем маленькое (провод, рис. а)), тень от него не доходит до земли, на земной поверхности остается только полутень. А освещенность в ней лишь немного меньше полной освещенности, создаваемой Солнцем – провод заслоняет очень небольшую часть солнечного диска. Поэтому на глаз эту полутень заметить почти невозможно.

Если же препятствие большое (столб, рис. б)), то тень от него «дотягивается» до земли, и мы видим на ней темную полосу, хотя и с размытыми полутенью краями.

3 (7–9).

Дело в том, что вода гораздо лучше, чем воздух проводит тепло (у нее высокая теплопроводность). Также у нее намного выше удельная теплоемкость (единице массы воды нужно сообщить очень много тепла, чтобы нагреть ее на один градус). Поэтому, когда наша рука находится в воде, температура которой ниже температуры нашего тела, она интенсивно отдает тепло ближайшему слою воды. Однако это тепло почти не приводит к повышению температуры этого слоя, потому что он тут же передает его более дальним слоям (у нее высокая теплопроводность). А то небольшое количество тепла, которое у него остается, почти не приводит к повышению его температуры – у воды высокая теплоемкость. В результате поверхностный слой нашей кожи быстро остывает, и мы чувствуем холод.

Если же рука находится в воздухе, его ближайший слой быстро нагревается (у воздуха маленькая теплоемкость и низкая теплопроводность). Температура этого слоя оказывается близкой к температуре нашего тела и нашей руке тепло. Именно поэтому ветер на морозе многократно усиливает ощущение холода – он «сдувает» прогретый нами слой воздуха, на его место приходит холодный зимний воздух, и мы начинаем мерзнуть.

4 (7–10).

а) Петин самокат способен разгоняться быстрее, чем Васин – он является, как говорят автомобилисты, более приёмистым. В начале движения Петя быстро набирает свою максимальную скорость, в то время как Вася еще продолжает разгоняться и движется медленно. Поэтому на коротких дистанциях, существенную часть которых составляет разгон, Петя приходит к финишу первым. Длинные же дистанции, на которых самокаты почти все время едут с максимальными скоростями, Вася проезжает быстрее – максимальная скорость у него больше.

б) Обозначим максимальную скорость Васиного самоката $v_1 = 5$ м/с, Петиного – $v_2 = 4$ м/с. Пусть ускорения самокатов при разгоне: у Васи – $a_1 = 0{,}5$ м/с^2, у Пети – $a_2 = 1$ м/с^2. Тогда времена их разгона до максимальной скорости:

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} = 10\ c \qquad\qquad t_2 = \frac{v_2}{a_2} = 4$$

Если эти ребята стартуют из одной точки, то вначале Петя опережает Васю (он быстрее разгоняется), а потом Вася начинает его догонять (его максимальная скорость больше). Через некоторое время t (если считать от старта) они снова сравняются. Расстояние S, которое каждый из них к этому моменту проедет, очевидно, и есть максимальная дистанция гонки, на которой Петя финиширует первым. Составим уравнение, приравняв расстояния, которые проедет каждый из них:

$$\frac{a_1 t_1^2}{2} + v_1(t - t_1) = \frac{a_2 t_2^2}{2} + v_2(t - t_2).$$

Первое слагаемое в каждой из частей уравнения – расстояние, пройденное за время разгона (равноускоренного), второе – при движении с постоянной (максимальной) скоростью. Обратите внимание – мы предполагаем, что к этому моменту и Петя, и Вася разгон уже закончили. Подставив в это уравнение выражения для t_1 и t_2, приводим его к виду:

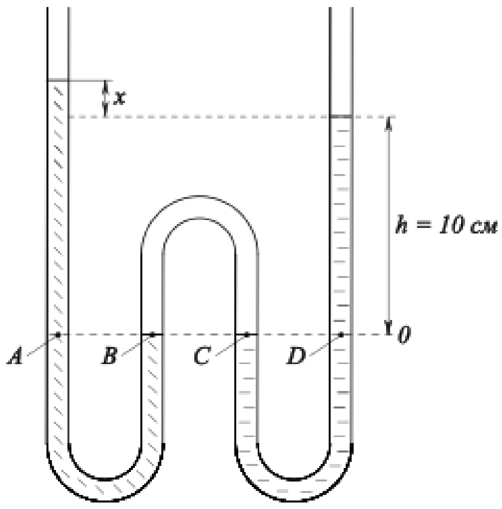
$$(v_1 - v_2)t = \frac{v_1^2}{2a_1} - \frac{v_2^2}{2a_2}$$

Подставив сюда численные значения скоростей и ускорений, получаем: $t = 17$ с. Это время больше, чем t_1 и t_2, что подтверждает сделанное нами предположение. Искомое расстояние:

$$S = \frac{a_1 t_1^2}{2} + v_1(t - t_1) = 60 \text{ м}$$

5 (8–11).

а) Обозначим цифрой 0 уровень, на котором вначале находятся границы вода–воздух и масло–воздух внутри трубки (см. рисунок). Давления в лежащих на этом уровне точках B и C одинаковы – каждое из них равно давлению воздуха в воздушной пробке. Давления в точках A и B также одинаковы – они расположены на одном уровне в однородной жидкости (масле). По такой же причине одинаковы давления в точках C и D. Следовательно, давления в точках A и D равны друг другу. Но давление в точке A равно сумме атмосферного давления и гидростатического давления столба масла, расположенного над ней. Аналогично, в давление точке D равно сумме атмосферного и давления столба воды. Значит, мы можем приравнять гидростатические давления:

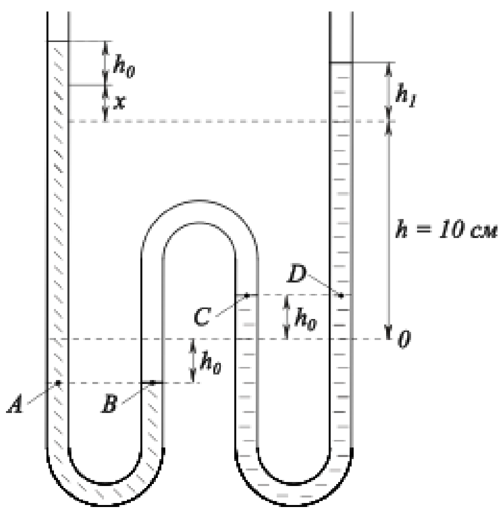


$$\rho_{ж} g h = \rho_{м} g (h + x)$$

Отсюда получаем:

$$x = \frac{\rho_{в} - \rho_{м}}{\rho_{м}} h = 2,5 \text{ см}$$

б) Обозначим через h_1 повышение уровня воды в правом колене трубки после долива туда дополнительного объема ΔV (см. рисунок). Обозначим также через h_0 высоту, на которую поднимется при этом уровень воды в центральной части трубки (точка C). Поскольку объем воздушной пробки мы считаем неизменным, уровень масла (точка B) опуститься на такое же расстояние. А так как количество масла в системе не изменяется, его уровень в левом колене должен подняться на такое же h_0.



Дополнительный объем ΔV, налитый в трубку, увеличивает полную длину столба воды на $a = \Delta V/S = 5$ см. Длина воздушной пробки и длина столба масла при этом не изменяются. Значит,

$$h_0 + h_1 = a$$

Давления в точках A, B, C и D по-прежнему будут одинаковы (см. предыдущий пункт). Приравняв гидростатические давления в точках A и D, получаем:

$$\rho_{\text{м}} g(h_0 + h + x + h_0) = \rho_{\text{в}} g(h - h_0 + h_1).$$

Исключив из двух этих уравнений h_1 (и подставив выражение для x, полученное в предыдущем пункте), получаем искомую высоту:

$$h_0 = \frac{\rho_{\text{в}}}{2(\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{м}})} a \approx 1,4 \text{ см}$$

в) Погрешность в вычислении h_0 в предыдущем пункте связана с тем, что длину воздушной пробки неверно считать неизменной. На самом деле при доливании воды давление в этой пробке возрастет, воздух сожмется, и длина его столба уменьшится.

Для оценки этой погрешности заметим, что начальное давление в воздушной пробке можно с хорошей точностью считать равным атмосферному: $p \approx p_0 \approx 10^5$ Па. Оно отличается от давления в атмосфере на гидростатическое давление столба воды высотой $h = 10$ см, при этом для создания давления в одну атмосферу требуется столб воды высотой приблизительно 10 м.

После долива воды давление в пробке увеличится на

$$\Delta p = \rho_{\text{в}} g(h_1 - h_0) = \rho_{\text{в}} g(a - 2h_0) \approx 220 \text{ Па}$$

(См. предыдущий пункт). Эта величина, как видим, много меньше p_0. Относительное изменение объема воздуха тогда также будет мало́. Для того, чтобы его найти, используем факт, приведенный в условии: $V \sim 1/p$ при неизменной температуре газа. Это означает, что произведение давления воздуха на его объем в данных условиях постоянно: (в таком виде этот факт называется законом Бойля – Мариотта). Тогда, если вначале давление было p и объем V, а изменились эти величины на малые Δp и ΔV соответственно, то

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = pV$$

Раскроем скобки в левой части. Получим:

$$pV + \Delta pV + p\Delta V + \Delta p\Delta V = pV$$

Первое слагаемое в левой части сокращается с правой частью. А в четвертом слагаемом стоит произведение двух малых величин – p и V. Это так называемая величина второго порядка малости – она мала по сравнению со вторым и третьим слагаемыми, содержащими только по одному малому сомножителю. Поэтому этим слагаемым можно пренебречь. Тогда получаем:

$$\Delta pV + p\Delta V = 0 \text{ или } \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{p}$$

Как видим, в данных условиях относительное изменение объема равно (с точностью до знака) относительному изменению давления. Знак «минус» полностью согласуется со здравым смыслом – если давление воздуха возрастает, то его объем, очевидно, уменьшается.

Заметим теперь, что длина воздушной пробки в трубке постоянного сечения прямо пропорциональна ее объему: $l \sim V$, поэтому относительные изменения этих величин будут одинаковы:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta V}{V}$$

Теперь мы можем найти, насколько изменяется длина воздушной пробки при доливании воды:

$$\Delta l = \frac{\Delta V}{V} l = \frac{\Delta p}{p} l \approx 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$$

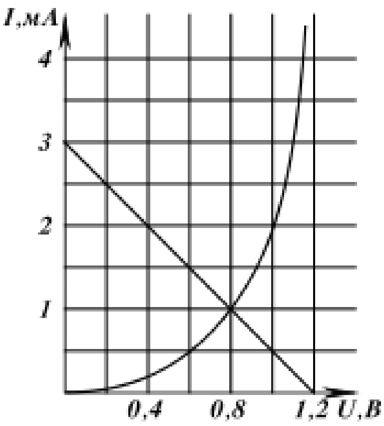
Знак «минус» мы опустили – нас интересует абсолютное значение. Как видно из решения предыдущего пункта, ошибка вычисления величины h_0 будет порядка изменения длины воздушной пробки l. Относительная погрешность тогда равна

$$\frac{\Delta l}{h_0} \approx 0,016 \sim 2\%$$

Как видим, она действительно весьма мала.

6 (9–11).

а) Если напряжение на диоде в этой цепи равно U, то силу тока можно найти двумя способами. С одной стороны, она должна быть равна значению $I(U)$, которое дает вольтамперная характеристика диода. С другой стороны, по закону Ома для резистора:



$$I = \frac{U_0 - U}{R_0}$$

Подставим в эту формулу численные значения и построим график соответствующей прямой (она называется нагрузочной прямой) в тех же координатах $U - I$, в которых нам задана вольтамперная характеристика диода. Точка пересечения двух графиков даст тогда значение силы тока в этой цепи. Как видим, из построения получается $I = 1$ мА.

б) Обозначим токи и напряжения в этой цепи так, как показано на рисунке. Через второй диод, очевидно, будет протекать такой же ток $I = 3$ мА, как и через источник. По графику вольтамперной характеристики диода находим тогда, что напряжение на нем $U \approx 1,1$ В. Значит, напряжение на первом диоде (и резисторе)

$$U_2 = U_1 - U = 0,6 \text{ В}$$

По графику ВАХ находим ток через него: $I_1 \approx 0,5$ мА. Через резистор тогда течет ток $I_2 = I - I_1 = 2,5$ мА. Теперь мы знаем и напряжение на резисторе и ток через него. По закону Ома находим его сопротивление:

$$R = \frac{U_2}{I_2} = 240 \text{ Ом}$$

7 (9–11).

Пусть v_n – вертикальная составляющая скорости шарика сразу после n-го отскока (первым отскоком будем называть начальный бросок). Пусть также u – горизонтальная составляющая скорости шарика. Эта составляющая не изменяется ни во время полета (при отсутствии сопротивления воздуха), ни при ударах о землю. Рассмотрим кинетическую энергию вертикального движения шарика сразу после n-го удара о землю

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2}$$

m – масса шарика. По условию, эта энергия уменьшается на $\alpha = 0,05$ от своего значения при каждом ударе, то есть:

$$\frac{E_{n+1}}{E_n}/ = \frac{v_{n+1}^2}{v_n^2} = 1 - \alpha$$

Значит, $v_{n+1} = v_n\sqrt{1-\alpha}$.

Рассмотрим теперь s_n – расстояние по горизонтали, которое шарик пролетает между n-м и $(n+1)$-м ударами. Время его полета

$$t_n = \frac{2v_n}{g},$$

а пройденное расстояние

$$s_n = ut_n = \frac{2u}{g}v_n$$

Как видим, s_n прямо пропорционально v_n, причем коэффициент пропорциональности от n не зависит. Отсюда следует, что последовательность s_n подчиняется такому же рекурентному соотношению, что и v_n:

$$s_{n+1} = s_n\sqrt{1-\alpha} = qs_n,$$

то есть представляет собой геометрическую последовательность со знаменателем

$$q = \sqrt{1-\alpha} \approx 0,9747, \qquad s_n = s_1 q^{n-1},$$

где s_1, по условию, равно 5 м. Поскольку $q < 1$, сумма всех членов такой последовательности конечна. Это означает удивительный факт – наш шарик совершит (формально) бесконечное число ударов о землю, но затратит на это конечное время и пройдет по горизонтали конечное расстояние! Это расстояние может быть найдено по известной формуле суммы убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{s_1}{1-q} \approx 39,5s_1 \approx 197,6 \text{ м}$$

8 (11).

а) Нет, это не может быть жидкий азот. Температура стенок стаканчика (77,4 К) – это температура кипения жидкого азота при атмосферном давлении 1 атм $\approx$ 100 кПа, значит, при такой температуре давление насыщенных паров азота равно 1 атм. Но полное давление воздуха как раз равно 1 атм, а в нем кроме азота есть еще кислород и немного других газов. Отсюда следует, что парциальное давление азота в атмосферном воздухе заведомо меньше 1 атм и он находится в состоянии ненасыщенного пара.

б) Эта жидкость – жидкий кислород, конденсирующийся на стенках стаканчика из атмосферного воздуха. Жидкий кислород кипит при более высокой температуре, чем жидкий азот. При 77 К давление его насыщенных паров $p_{\text{н}} \approx 20{,}0$ кПа (см., например, *источник*). А парциальное давление кислорода в атмосферном воздухе на уровне моря $p_{\text{п}} \approx 20{,}9$ кПа (см., например, *источник*). Поэтому в охлажденном до такой температуры воздухе кислород оказывается в состоянии перенасыщенного пара и начинает конденсироваться.