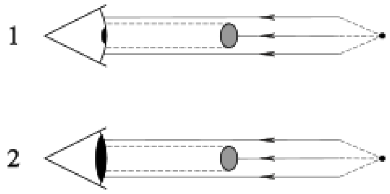
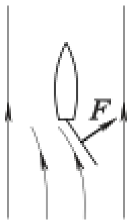
Задание 1



Лучи света, приходящие к нам от удаленного источника (например, звезды), идут практически параллельно друг другу. Поэтому для того, чтобы препятствие (головка спички) смогло заслонить такой источник от нас, оно должно быть больше зрачка нашего глаза (см. рисунок). При ярком освещении зрачок нашего глаза сужается, чтобы защитить глаз от слишком большого количества света. Его размер оказывается меньше размера спичечной головки, в результате такое препятствие заслоняет от нас точечный источник (рис. 1). В темноте (ночью) зрачок, наоборот, максимально расширяется, чтобы уловить хоть немного света и дать нам возможность видеть предметы. Его размер становится больше размера спичечной головки и свет «в обход» нее попадает нам в глаз – звезду на ночном небе мы все равно видим (рис. 2).

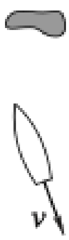
Задание 2

а) Ответ: 1. По команде «Полный назад» судовой механик меняет направление вращения гребных винтов судна на противоположное. Винты начинают отбрасывать воду не назад, а вперед. В результате судно начинает двигаться «задним ходом» (относительно воды). То, что наш корабль при этом продолжает сносить на скалы, означает, что скорость течения больше скорости его хода относительно воды.



Руль корабля (точнее, перо руля) представляет собой вертикальную пластину, находящуюся под водой в районе кормы (задней точки корабля). Перо руля может поворачиваться вокруг вертикальной оси. Когда судно идет прямо, перо руля расположено вдоль оси корабля. По команде «Право руля» рулевой поворачивает штурвал вправо, при этом перо руля поворачивается так, как показано на рисунке (пропорции нарушены – перо руля изображено непропорционально большим). Поскольку наш корабль движется задним ходом, поток воды набегает на него сзади. При этом перо руля отбрасывает этот поток влево, поэтому на него действует сила давления, направленная вправо. Значит, корабль повернется так, как показано на рисунке 1.

б) Ответ: вправо.



Корабль движется задним ходом, при этом его скорость относительно воды направлена вдоль его корпуса. Поэтому, когда он повернется так, как показано на рисунке 1, его скорость повернется точно так же (см. рисунок). Значит, относительно воды он начнет смещаться вправо. Поскольку вода не движется вдоль линии скал (течение направлено перпендикулярно этой линии), то и относительно скал корабль будет смещаться вправо.

Задание 3

Ответ: Саша.

После выдёргивания ролика мгновенно исчезает сила реакции опоры со стороны ролика, действовавшая на каждое из звеньев, двигавшихся по окружности. Следовательно, сумма всех сил (равнодействующая сил), действовавших на поворачивающие звенья, изменится.

Для звеньев, ранее двигавшихся по окружности, ускорение перестанет быть чисто центростремительным. Следовательно, форма цепочки изменится.

При длительном свободном движении колебательные движения цепи затухнут. Цепь продолжит вращаться как целое. Форма цепи будет стремиться к окружности: центробежные силы будут «выправлять» любую асимметрию в расположении звеньев. Прав Саша.

Задание 4

а) Для получения ответа на вопрос задачи воспользуемся методом анализа размерности. Время остывания τ зависит от радиуса шара R и характеристик материала, из которого он сделан: плотности ρ, удельной теплоемкости c и коэффициента теплопроводности λ. Оно могло бы зависеть от начальной разности температур Δt, однако нам сказали, что такая зависимость в эксперименте не обнаружена. Воспользовавшись определениями названных величин, выразим их размерности через размерности основных единиц – длины L, массы M, времени T и температуры θ. Имеем:

$$[R] = L$$
$$[\rho] = ML^{-3}$$
$$[c] = L^2T^{-2}\theta^{-1}$$

Будем искать зависимость τ от этих параметров в виде одночлена:

$$\tau = CR^x\rho^y c^z\lambda^t$$

Здесь C – безразмерный коэффициент, а x, y, z и t – показатели степени, которые нужно определить. Подставим в эту формулу размерности всех величин. Поскольку $[\tau] = T$, должно выполняться равенство:

$$T = L^x(ML^{-3})^y(L^2T^{-2}\theta^{-1})^z(MLT^{-3}\theta^{-1})^t$$

ПосколькуL, M, T и θ – независимые основные единицы (они никак не выражаются друг через друга), показатели степеней, в которых они входят в левую и правую части этого уравнения, должны быть одинаковы. Раскрыв скобки и приравняв эти показатели, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + t = 0 \\ y + t = 0 \\ -2z - 3t = 1 \\ -z - t = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Решив эту систему (например, методом исключения переменных), находим:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases} . \qquad (2)$$

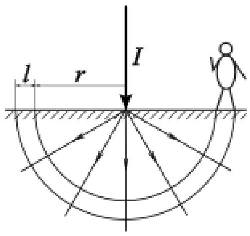
Заметим, что из единственности решения данной системы следует, что из параметров нашей задачи нельзя составить безразмерную комбинацию. А это означает, что искомая зависимость действительно может быть только одночленом . Итак, мы получаем:

$$\tau = C\frac{R^2\rho c}{\lambda} \sim R^2$$

Отсюда следует, что при увеличении радиуса шара в 2 раза искомое время увеличится в 4 раза.

б) Если увеличить Δt, например, в 2 раза, то все разности температур между различными точками шара (в какой-то момент остывания) тоже станут вдвое больше. Значит, все потоки тепла, возникающие в шаре в процессе остывания, увеличатся в 2 раза (это следует из закона теплопроводности). Однако и изменение температуры любого кусочка шара (к тому моменту, когда в центре вместо Δt станет $\Delta t/2$) будет вдвое больше. Этот кусочек тогда должен будет к этому моменту отдать вдвое большее количество тепла. Поскольку скорость передачи тепла, как было указано, также возрастет в два раза, время остывания окажется таким же.

Задание 5



Будем считать, что электрический ток молнии растекается по земле равномерно во все стороны. В таком случае поверхности одинакового потенциала будут представлять собой полусферы с центром в точке удара (см. рисунок). Рассмотрим две таких полусферы с радиусами r и$r+l$, где l – длина шага человека. Разность потенциалов между ними по закону Ома равна $U = IR$, где I – сила тока молнии, R – сопротивление полусферического слоя, заключенного между полусферами. Если $l \ll r$, то можно пренебречь кривизной этого слоя и вычислять его сопротивление так, как если бы он был плоской стенкой площади $S = 2\pi r^2$ и толщиной l: $R \sim \rho\frac{l}{S} = \frac{\rho l}{2\pi r^2}$. Тогда напряжение между точками земной поверхности, в которых находятся ноги человека, равно $U = \frac{I\rho l}{2\pi r^2}$.

Как видим, это напряжение уменьшается при удалении от места удара. Минимальное безопасное расстояние – то, на котором U становится порядка 50 В. Выражая из формулы r, получаем:

$$r = \sqrt{\frac{I\rho l}{2\pi U}}$$

Длина шага взрослого человека $l \sim 0,7$ м. Подставив в формулу это значение, а также величины, приведенные в условии задачи, находим $r \sim 70$ м. Как видим, длина шага действительно много меньше этого расстояния.

Задание 6

а) Пусть верхушка башни находится на расстоянии r от центра Земли. Тогда находящийся на ней шар движется вокруг нашей планеты по окружности радиуса r, причем один оборот делает за время $T = 24$ ч. Центробежная сила, действующая на него в системе отсчета Земли, равна его массе m, умноженной на центростремительное ускорение в инерциальной системе отсчета:

$$F_{ц} = ma = m\omega^2 r,$$

где $\omega = 2\pi/T$ – угловая скорость его движения. Сила тяжести, действующая на шар, обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Земли, поэтому может быть записана как

$$F_{т} = mg\frac{R^2}{r^2}$$

потому что на поверхности Земли она равна mg. Как видим, центробежная сила при увеличении r растет, а сила тяжести уменьшается. Шар начнет улетать от Земли, вытягивая за собой цепь, если центробежная сила окажется больше силы тяжести. Условие минимальной высоты башни – равенство этих сил:

$$m(\frac{2\pi}{T})^2 r = mg\frac{R^2}{r^2}.$$

Выражая отсюда r, получаем:

$$r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}$$

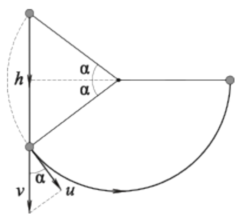
Подставив сюда численные значения (не забыв перевести их в единицы СИ), находим: $r \sim 4,22 \cdot 10^7$ м $= 42200$ км.

Это радиус геостационарной орбиты. Минимальная высота башни от поверхности Земли равна $H = r_R \sim 35800$ км. Маловероятно, что в обозримом будущем такую башню можно будет построить.

б) Электроэнергия будет вырабатываться за счет кинетической энергии вращения Земли. Каким образом работа описанного устройства приведет к торможению этого вращения (то есть к увеличению продолжительности суток) – об этом мы предлагаем вам подумать самостоятельно.

Задание 7

Пусть длина нити равна l, а масса шарика – m. После того, как шарик отпустят, он сначала будет свободно падать – до тех пор, пока нить не натянется. Как видно из рисунка, к этому моменту он пройдет по вертикали расстояние $h = 2l \sin\alpha$.



Скорость v, которую он наберет к этому моменту, можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = 2mgl\sin\alpha \to v = 2\sqrt{gl\sin\alpha}$$

Когда нить натянется, произойдет, по сути, абсолютно неупругий удар. Шарик полностью потеряет радиальную составляющую набранной скорости, а вот касательная к окружности составляющая у него сохранится, потому что во время удара на него будет действовать только одна ударная (очень большая) сила – сила натяжения нити. А направлена эта сила по радиусу. Значит, скорость шарика сразу после удара будет равна $u = v\cos\alpha = 2\cos\alpha\sqrt{gl\sin\alpha}$.

После этого шарик будет двигаться по дуге окружности радиуса l. Его механическая энергия будет сохраняться, потому что никаких ударов происходит, а сила натяжения работы над ним не совершает – она в любой момент перпендикулярна его скорости. Значит, шарик снова поднимется выше точки подвеса, если оставшейся у него кинетической энергии хватит на то, чтобы подняться на высоту $h/2$:

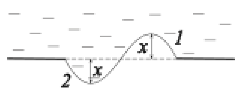
$$\frac{mu^2}{2} > mg\frac{h}{2}$$

Подставив сюда u и h, после преобразований получаем неравенство:

$$\cos\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Таким образом, шарик снова поднимется выше точки подвеса, если $\alpha < 45^\circ$.

Задание 8



Поскольку сжимаемость воды близка к нулю (она практически не может изменить свой объем), а воздуха в сосуде нет, вода сможет выйти из сосуда только если в него войдет воздух. Но для этого на начальном этапе этого процесса поверхность воды в отверстии должна принять форму, показанную на рисунке – с одной стороны выгнуться наружу, а с другой – внутрь сосуда. Подумаем, а что произойдет при этом с полной энергией системы?

Гравитационная потенциальная энергия воды уменьшится – у нее исчезнет «горбик» 1, центр тяжести которого выше дна сосуда, и появится точно такой же «горбик» 2, центр тяжести которого ниже. Поскольку точный расчет формы этих водяных тел не представляется возможным, для грубой оценки заменим каждое из них, например, четырехугольной пирамидой с основанием $r \times r$ и высотой x, где r – размер отверстия, а x – максимальное смещение поверхности воды по вертикали. Тогда объем такого тела имеет порядок величины $V \sim xr^2$, его масса $m = \rho V \sim xr^2$, а изменение высоты центра тяжести при его перемещении из положения 1 в положение 2 будет $\Delta h \sim x$. Изменение потенциальной энергии воды равно тогда $\Delta E_{\text{п}} = -mg\Delta h \sim -\rho g x^2 r^2$.

Мы опускаем в этих формулах все численные коэффициенты, поскольку при таком грубом способе оценки они не имеют никакого смысла. Заметим теперь, что при таком изгибе поверхности изменяется поверхностная энергия воды. Площадь ее поверхности, очевидно, возрастает, поэтому возрастает и поверхностная энергия. Если изменение площади равно ΔS, то поверхностная энергия увеличивается на $\Delta E_{\text{пов}} = \sigma \Delta S$.

Для оценки ΔS используем ту же самую модель четырехугольной пирамиды. Начальная площадь поверхности равна площади основания такой пирамиды $S_0 = r^2$.

Площадь изогнутой поверхности S можно оценить как суммарную площадь боковых граней. Решив несложную геометрическую задачу, получаем $S = r\sqrt{r^2 + (ax)^2}$.

Здесь a – численный коэффициент, значение которого нам не понадобится. Это – точный результат. Но теперь вспомним, что $x \ll r$ – мы рассматриваем самую начальную, бесконечно малую деформацию поверхности воды. Тогда эту площадь можно записать как

$$S = r^2\sqrt{1 + (\frac{ax}{r})^2} \sim r^2(1 + \frac{1}{2}(\frac{ax}{r})^2.$$

Мы использовали известную формулу приближенных вычислений $\sqrt{1+\alpha} \sim 1 + \alpha/2$, справедливую при $\alpha \ll 1$. Значит, изменение площади $\Delta S = S - S_0 = \frac{1}{2}(ax)^2 \sim x^2$, изменение поверхностной энергии $\Delta E_{\text{пов}} = \sigma \Delta S \sim \sigma x^2$.

Как видим, при малых r эта величина положительна, что означает невозможность такой деформации поверхности без внешних воздействий, когда система не может получить энергию извне. При больших r изменение энергии отрицательно, энергия системы понижается. В таком случае бесконечно малые деформации поверхности будут возрастать, образуется воздушный пузырь – вода начнет выливаться. Оценку минимального размера отверстия, из которого вода льется, можно получить, приравняв выражение в скобках к нулю:

$$\rho g r^2 \sim \sigma \to r \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

Подставив численные значения, получаем $r \sim 3 \cdot 10^{-3}$ м $= 3$ мм.
