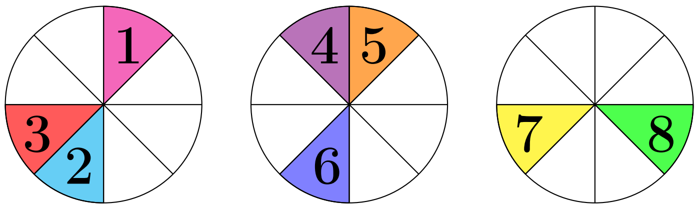
В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешалось), а также проверяется ли полное решение или достаточно было ввести ответ.

1 (6-7; ответ). Среди своих старых рисунков Катя нашла несколько картинок с разноцветным зонтиком. Катя помнит, что рисовала один и тот же зонтик (вид сверху), только повёрнутый по-разному. К сожалению, от времени краска частично выцвела.



Помогите Кате восстановить, в каком порядке располагались цвета на зонтике, если идти от 1 (розового) по часовой стрелке.

Ответ. 7 (жёлтый), 4 (фиолетовый), 5 (оранжевый), 2 (голубой), 3 (красный), 8 (зелёный), 6 (синий).

Решение. Если секторы 4 (фиолетовый) и 5 (оранжевый) расположены слева от розового, то не останется места для секторов 7 (жёлтый) и 8 (зелёный). Если же секторы 4 и 5 идут по часовой стрелке сразу после розового, то для 7 и 8 остаются два противоположных сектора — значит, этот вариант также не подходит. Остаётся случай, в котором сектора 4 и 5 идут перед секторами 2 и 3 — в этом случае как раз остаётся место для секторов 7 и 8.

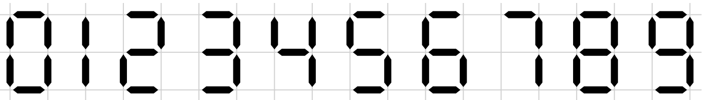
2 (6–7; ответ). В ребусе ТУР + ТУР + ТУР + ... + ТУР = ТУРЛОМ одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры, разные буквы заменяют разные цифры. Часть одинаковых слагаемых мы заменили многоточием. Сколько всего может быть ТУРов, чтобы ребус имел решение? Найдите наименьшее и наибольшее количества.

Ответ. Наименьшее возможное количетсво туров 1002, наибольшее — 1009.

Решение. ТУРЛОМ $=$ ТУР $\cdot\, 1000 +$ ЛОМ, то есть слагаемых не меньше 1000, и ЛОМ также равен сумме нескольких ТУРов. Поскольку оба эти числа — трёхзначные, в ЛОМе не больше девяти ТУРов; но и не меньше двух (поскольку разные буквы заменяют разные цифры, ЛОМ не может быть равен ТУРу и не может быть равен 0). Может ли ЛОМ состоять ровно из двух или ровно из девяти ТУРов? Да: если ТУР $= 135$, то ТУР$\cdot 2 = 270$, а если ТУР $= 103$, то ТУР $\cdot\, 9 = 927$. Значит, наименьшее количество ТУРов в ТУРЛОМе равно 1002, а наибольшее — 1009.

Комментарий. Для $1003, 1004, \ldots 1008$ слагаемых ребус также имеет решения.

3 (6–8; ответ). В спорткомплексе 99 шкафчиков с номерами от 01 до 99. На браслете с ключом цифры написаны по образцу на рисунке:

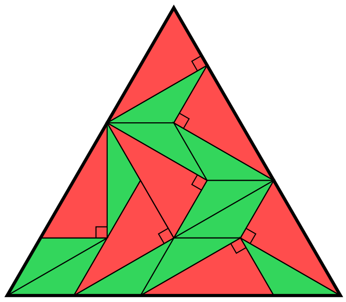


По браслету непонятно, где низ, а где верх, и поэтому иногда нельзя однозначно определить номер своего шкафчика (например, браслеты, соответствующие номерам 10 и 01, выглядят одинаково). Мише выдали один из ключей. В скольких случаях из 99 он, посмотрев на браслет, не сможет однозначно определить номер своего шкафчика?

Ответ. 42.

Решение 1. Назовём цифры 0, 1, 2, 5, 6, 8 и 9 *особыми*: 0, 1, 2, 5 и 8 при переворачивании переходят сами в себя, а 6 и 9 — друг в друга. Если в номерке есть хотя бы одна цифра из остальных — Миша уже сможет определить, какой шкафчик ему достался. Каждая особая цифра образует однозначно определяемый номерок ровно с одной из других особых цифр: 0, 1, 2, 5 и 8 — сами с собой, 6 и 9 — друг с другом. Значит, «неоднозначный» номер можно получить, выбрав 7 способами первую особую цифру, и 6 способами после этого выбрав вторую особую — всего 42 способа.

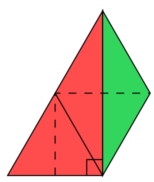
Решение 2. Назовём цифры 0, 1, 2, 5, 6, 8 и 9 *особыми*: 0, 1, 2, 5 и 8 при переворачивании переходят сами в себя, а 6 и 9 — друг в друга. Если в номерке есть хотя бы одна цифра из остальных — Миша уже сможет определить, какой шкафчик ему достался. Из двух особых цифр можно составить $7 \cdot 7 = 49$ номерков. Однако, номерка 00 не бывает, а номерки 11, 22, 55 и 88 при переворачивании перейдут сами в себя (а значит, шкафчик определить всё-таки можно); номерки 69 и 96 также при переворачивании перейдут сами в себя. В остальных случаях при переворачивании номерок перейдёт в другой. Значит, из 49 номерков нам нужно вычесть 7 — останется 42.



4 (8–9; ответ). Правильный треугольник сложен из одинаковых прямоугольных (красных) и одинаковых равнобедренных (зелёных) треугольников так, как показано на рисунке. Чему равна площадь правильного треугольника, если площадь зелёного треугольника равна 1? При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

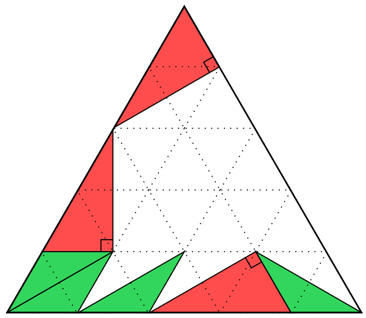
Ответ. 25.

Решение 1. Левый нижний угол правильного треугольника складывается из двух равных углов равнобедренного треугольника — значит, углы зелёных треугольников равны 30°, 30° и 120°. Верхний угол правильного треуголька совпадает с одним из углов прямоугольного — значит, углы красных треугольников равны 30°, 60° и 90°. Рассмотрим отдельно один красный и один зелёный треугольники. Проведём в красном треугольнике из вершины прямого угла отрезок под углом 30°, как на рисунке.



Этот отрезок отделяет от красного треугольника равнобедренный, равный зелёному по стороне и прилежащим к ней углам в 30°. Другая часть — треугольник с двумя углами 60°, то есть правильный, сторона которого при этом равна боковому ребру зелёного треугольника. Опустив высоты в этих треугольниках, получим маленькие треугольники с углами 30°, 60°, 90° и равными гипотенузами.

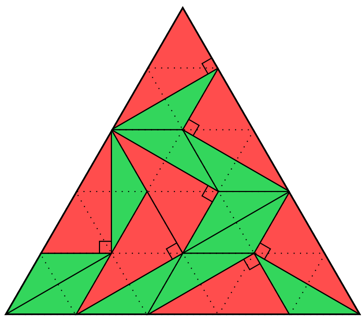
Таким образом, каждый зелёный треугольник состоит из 2, а каждый красный — из 4 маленьких прямоугольных треугольников, то есть площадь красного треугольника в 2 раза больше зелёного и равна 2. Осталось посчитать треугольники: красных 7, зелёных 11, и их общая площадь равна $7 \cdot 2 + 11 = 25$.



Решение 2. Заметим, что нижняя сторона правильного треугольника складывается из гипотенузы красного и трёх боковых сторон зелёного треугольника, а левая сторона — из двух гипотенуз красного треугольника и бокового ребра зелёного. Значит, гипотенуза красного треугольника в два раза больше бокового ребра зелёного, а сторона большого правильного треугольника в 5 раз больше бокового ребра зелёного.

Нарисуем треугольную сетку так, чтобы вдоль стороны большого правильного треугольника помещалось ровно 5 маленьких. Заметим, что два зелёных треугольника в левом нижнем углу занимают ровно два треугольника сетки: боковые стороны зелёных треугольников равны сторонам треугольников сетки, а два угла при основании складываются в угол правильного треугольника. Значит, площадь двух треугольников сетки равна площади двух зелёных, и площадь одного треугольника сетки равна 1. Осталось посчитать, на сколько треугольников сетки разбит большой треугольник: на 25.

Комментарий. Можно показать, что все вершины треугольников разбиения также лежат на треугольной сетке (см. рисунок).

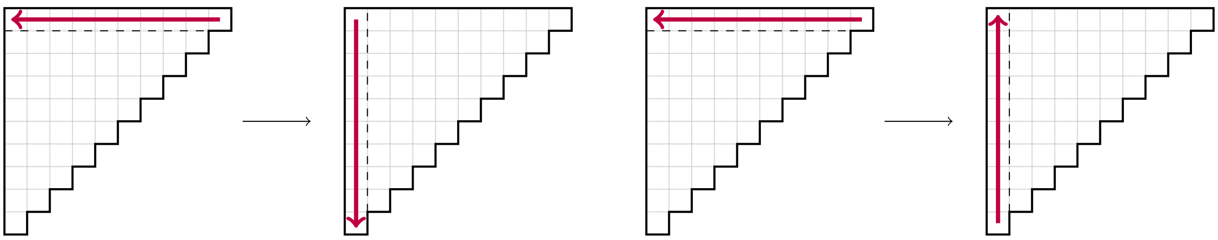


5 (8–11; решение). По мнению Тани, в идеальном кофейном напитке должно быть ровно в 9 раз больше кофе, чем молока. У Глеба есть стакан и кружка, а также целая цистерна молока и огромная турка с неограниченным запасом кофе. Аккуратный Глеб может отпить ровно половину содержимого кружки или стакана. Как Глебу приготовить для Тани целый стакан идеального кофейного напитка, если точный объём кружки неизвестен, но он как минимум на 10% больше объёма стакана? Глеб может наливать кофе и молоко в стакан или в кружку, может выливать содержимое, переливать из кружки в стакан или наоборот, отпивать половину содержимого любое конечное количество раз.

Решение 1. Пусть Глеб наберёт стакан кофе, отопьёт из него половину и перельёт оставшиеся полстакана в кружку. Далее Глеб нальёт полный стакан молока и 3 раза подряд отопьёт половину содержимого — после этого оставшуюся восьмую часть стакана перельёт в кружку. Теперь в кружке больше половины стакана смеси, причём $\frac{4}{5}$ смеси составляет кофе и $\frac{1}{5}$ — молоко. Теперь пусть Глеб снова наберёт полный стакан кофе и отопьёт половину, а затем дольёт в стакан смесь из кружки. Посчитаем, сколько в получившемся полном стакане окажется молока. Глеб долил $\frac{1}{2}$ стакана смеси, в которой молоко составляет $\frac{1}{5}$, а больше молока в стакане не было — значит, в нём стало $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ стакана молока. Значит, оставшиеся $\frac{9}{10}$ — это кофе, и в стакане теперь идеальный напиток.

Решение 2. Глеб может отмерять любую жидкость в объёме $\frac{1}{2^n}$ стакана. Если бы ограничений на объём кружки не было, он мог бы набрать в неё $1+\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ стакана кофе, затем добавить туда $\frac{1}{8}$ стакана молока, размешать и налить полученное в стакан. Но $\frac{9}{8} + \frac{1}{8} = \frac{10}{8} = 1.25$, то есть всё это может не войти в кружку. Модифицируем способ: можно набрать в кружку $9k \cdot \frac{1}{2^n}$ кофе и $k \cdot \frac{1}{2^n}$ молока — тогда в ней будет идеальный напиток. Осталось только подобрать объём так, чтобы всё поместилось в кружку и при этом занимало не меньше стакана, то есть $10k \cdot \frac{1}{2^n}$ смеси должно занимать не больше 1,1, но и не меньше 1 стакана. Подходит, например, $n = 6$ и $k = 7$: $\frac{70}{64} = 1{,}09375$.

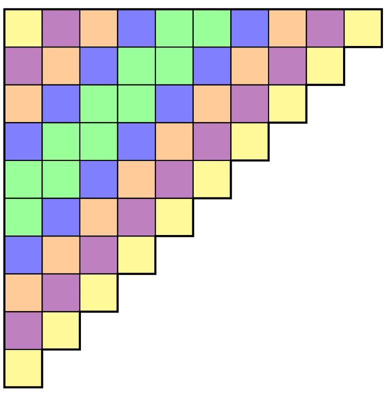
6 (9–11; ответ). а) У Полины есть волшебная шоколадка в форме клетчатой лесенки со стороной 10 (см. рисунок), в каждой дольке своя начинка. Каждую минуту Полина отламывает верхний ряд долек шоколадки, поворачивает его на 90 градусов *против часовой стрелки* и приставляет её к оставшейся части в виде столбца слева, как показано на рисунке (после этого столбец слипается с другой частью, и снова получается цельная лесенка). Как только каждая долька вернётся на то же место, в котором она была изначально, Полина съест всю шоколадку. Через сколько минут это произойдёт?



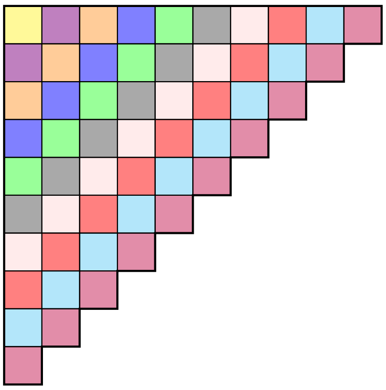
а) б)

б) У Саши есть такая же волшебная шоколадка. Он каждую минуту отламывает верхний ряд долек шоколадки, поворачивает его на 90 градусов *по часовой стрелке* и приставляет её к оставшейся части в виде столбца слева, как показано на рисунке.

Ответ. а) 11. б) 2520.



Решение. а) Посмотрим, что происходит с каждой долькой шоколадки с течением времени. Покрасим диагонали шоколадки, как на рисунке — по две в каждый цвет, начиная с крайних и двигаясь внутрь. Если долька находится не на верхней полосе, то через минуту она сдвинется по диагонали своего цвета вправо-вверх. Если же долька была на верхней полосе, то через минуту она окажется внизу второй диагонали такого же цвета. Таким образом, каждая долька пройдёт по своей диагонали вправо-вверх, перейдёт на вторую диагональ своего цвета, пройдёт по ней, вернётся на свою изначальную диагональ и дойдёт до своего места. Осталось заметить, что в каждых диагоналях одного цвета в сумме 11 клеток — то есть через 11 минут все дольки окажутся на своих местах.



б) Здесь каждая долька бегает строго по диагонали своего цвета. Таким образом, каждая долька возвращается на место за число минут, равное длине её диагонали. Тогда первый момент, когда все дольки вернутся на места, настанет спустя число минут, равное наименьшему общему кратному длин диагоналей, то есть

$$\text{НОК}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520.$$

Комментарий. И в том, и в другом пункте описанное действие — это перестановка долек шоколадки. По сути, задача сводится к поиску *порядка* перестановки. За счёт наглядности в этой задаче было легко представить перестановку в виде одновременного действия нескольких циклов. Оказывается, любую перестановку можно представить в виде одновременного действия — *произведения* — нескольких циклов (задумайтесь — почему?), и тогда её порядок будет равен НОК-у длин всех циклов.

Это только один из сюжетов очень богатой и интересной теории о перестановках. Подробней о ней можно прочитать, например, в брошюре «Перестановки» (А.Шень).

7 (10–11; решение). Петя покрасил 100 натуральных чисел в красный цвет и 100 других натуральных чисел — в синий. Вася выписал на доску 200 выражений: для каждого красного числа n записал $\frac{x^n}{1-x}$, а для каждого синего числа m записал $\frac{x^m}{1-x^{-1}}$. После этого мальчики сложили все записанные выражения, привели подобные и упростили выражение. Докажите, что у них получился многочлен от x.

Решение 1. Заметим, что

$$\frac{x^n}{1-x} = \frac{x^n-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{1-x} + \frac{1}{1-x} =$$

$$= -(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1) + \frac{1}{1-x}.$$

В свою очередь,

$$\frac{x^m}{1-x^{-1}} = \frac{x^{m+1}}{x-1} = \frac{x^{m+1}-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^m+x^{m-1}+\cdots+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x^m + x^{m-1} + \cdots + 1 - \frac{1}{1-x}.$$

Таким образом, 100 слагаемых, соответствующих красным числам, в сумме дадут некоторый многочлен и $100 \cdot \frac{1}{1-x}$, а 100 слагаемых, соответствующих синим числам — многочлен и $(-100) \cdot \frac{1}{1-x}$. То есть 100 «красных» дробей и 100 «синих» дробей взаимно уничтожатся, и останется только многочлен.

Решение 2. Разобъём 200 чисел на 100 пар, в каждой паре одно число — красное, другое — синее. Посмотрим на сумму выражений, соответствующих красному числу n и синему m:

$$\frac{x^n}{1-x}+\frac{x^m}{1-x^{-1}}=\frac{x^n}{1-x}-\frac{x^{m+1}}{1-x}=\frac{x^n-x^{m+1}}{1-x}=\begin{cases}x^n+\ldots+x^m, & m\geqslant n\\ -x^{m+1}-\ldots-x^{n-1}, & m<n\end{cases}.$$

Таким образом, сумма выражений каждой пары синего и красного числа — это многочлен, а значит, и после приведения подобных и упрощения получится многочлен.

Комментарий. Если $|x|<1$, то сумма бесконечной геометрической прогрессии $x^n+x^{n+1}+\ldots$ равна $\frac{x^n}{1-x}$. Поэтому, если число x достаточно маленькое (и $m>n$), то

$$x^n+x^{n+1}+\ldots+x^m\approx\frac{x^n}{1-x}.$$

Если, наоборот, число x достаточно большое, то можно оценить ту же сумму по-другому:

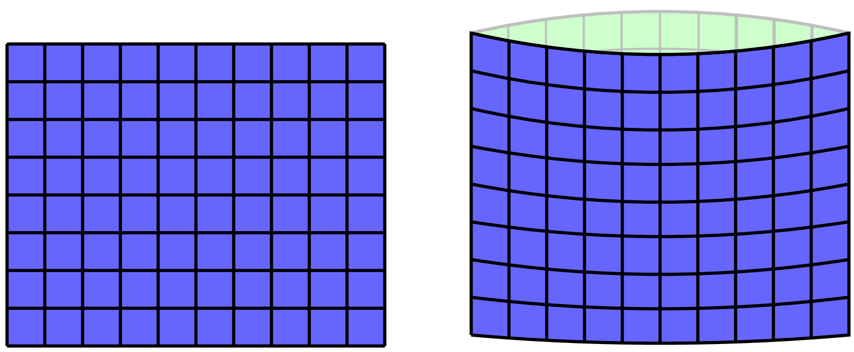
$$x^m+x^{m-1}+\ldots+x^n\approx x^m+x^{m-1}+\ldots=\frac{x^m}{1-x^{-1}}.$$

Эти два приближенных ответа получены для совершенно разных диапазонов x, поэтому кажется бессмысленным их складывать… и тем не менее, если их сложить, получается *точная* формула суммы конечной геометрической прогрессии:

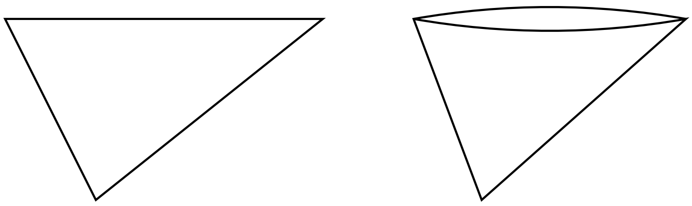
$$\frac{x^n}{1-x}+\frac{x^m}{1-x^{-1}}=\frac{x^n}{1-x}+\frac{x^{m+1}}{x-1}=\frac{x^n-x^{m+1}}{1-x}=x^n+\ldots+x^m.$$

Это частный случай *теоремы Бриона.*

8 (10-11; ответ). Таня сделала кошелёк из двух клетчатых кусочков ткани 8×10, наложив их друг на друга и сшив друг с другом края обеих пар коротких сторон и нижних длинных сторон (см. рисунок, слева сплющенный кошелёк, справа приоткрытый).

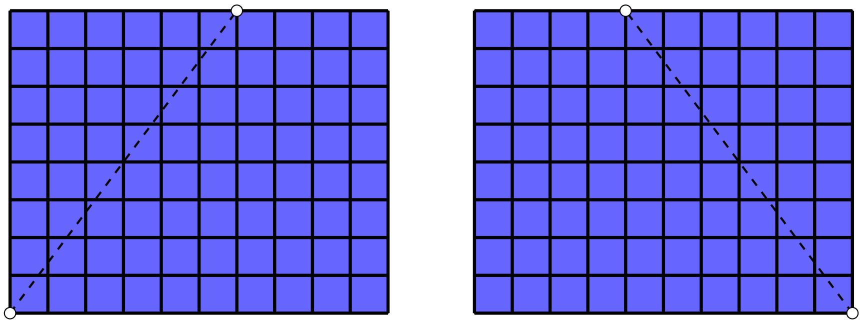


Хулиган Вася сделал прямолинейный надрез на переднем слое ткани от одного узла сетки до другого. Но Таня не расстроилась, потому что смогла сложить из надрезанного кошелька кулёк (в сплющенном виде это двуслойный треугольник, не обязательно равнобедренный, нескреплённые стороны совпадают — пример кулька в сплющенном и в приоткытом виде см. на рисунке ниже).

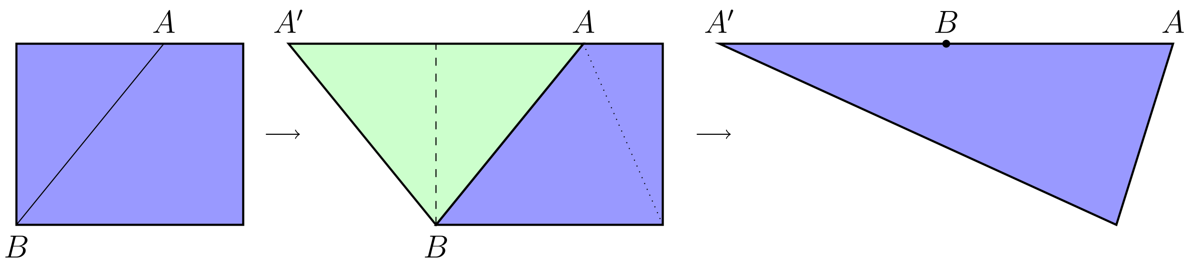


Отметьте на рисунке-кошельке два узла сетки, между которыми мог провести надрез Вася.

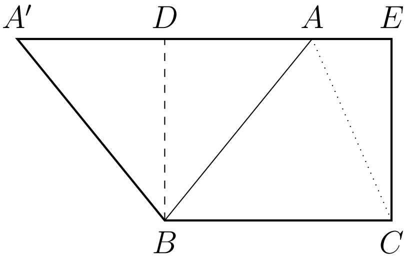
Ответ. Все возможные способы приведены на рисунках ниже.



Решение. Для начала поймём, как можно из надрезанного кошелька получить кулёк. Если прорезь Васи не доходит до верхнего края кошелька, то как ни складывай — кулёк не получится: в прорезанном кошельке две «дырки», а у кулька она только одна. Значит, надрез должен идти от одной из точек на верхнем крае кулька. Кроме того, у кулька только один угол, а у кошелька их два, причём, поскольку сумма плоских углов при них меньше 360°, расплющить угол кошелька в плоскую ткань не получится. Значит, надрез идёт от одного из углов до верхней стороны. Попробуем понять, в какую именно точку на верхнем крае идёт разрез. Отогнём верхний слой кошелька (см. рисунок). Края у кулька должны получиться ровные, значит, точки A и A' будут вершинами верхнего края кулька: при остальных точках нового края, включая точку B, угол или сумма углов равны 180°.



Чтобы понять положение точки A на верхней грани с помощью теоремы Пифагора, вычислим длину AB. Сделать это можно разными способами.



Вариант 1. Точка A станет углом кулька, значит, углы BAC и CAE после перегибания фигуры в кулёк должны совместиться. Однако, в силу параллельности сторон BC и DE имеем $\angle CAE = \angle ACB$, значит, $\angle BAC = \angle ACB$, и треугольник ABC — равнобедренный. Таким образом, $AB = BC = 10$.

Вариант 2. Поскольку A и A' станут углами кулька, то длины переднего и заднего края кулька между ними должны быть равны. Передний край складывается из $A'B + AB = 2AB$, задний — из отрезков $A'D = AD$, $DE = 10$ и $AE = (10 - AD)$. Значит, $2AB = 20$, $AB = 10$.

Итак, $AB = 10$, и по теореме Пифагора $AD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. Таким образом, точка A находится на расстоянии 6 клеток от верхнего угла кошелька.

Комментарий. Разрезать таким образом кошелёк и сложить из него кулёк можно и при других соотношениях сторон — важно лишь, что верхняя сторона кошелька не короче вертикальной. В этом случае надрез $AB = BC \geqslant BD$ и $AB = DE < BE$, значит, подходящая точка A на верхней стороне кошелька найдётся.

Вариант подготовили: А. В. Антропов, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, П. Е. Закорко, Т. В. Казицына, В. А. Клепцын, Т. А. Корчемкина, Г. А. Мерзон, Г. С. Минаев, И. Т. Русских, Н. А. Солодовников.