В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешалось), а также, проверяется ли полное решение или достаточно было ввести ответ.

1 (6; ответ). Саша написал на доске несколько двузначных чисел в порядке возрастания, а после этого заменил одинаковые цифры на одинаковые буквы, а разные цифры — на разные буквы. У него получилось (в том же порядке)

АС, АР, ЯР, ЯК, ОК, ОМ, УМ, УЖ, ИЖ, ИА

Восстановите цифры.

Ответ. А = 5, Ж = 4, И = 9, К = 2, М = 3, О = 7, Р = 1, С = 0, У = 8, Я = 6.

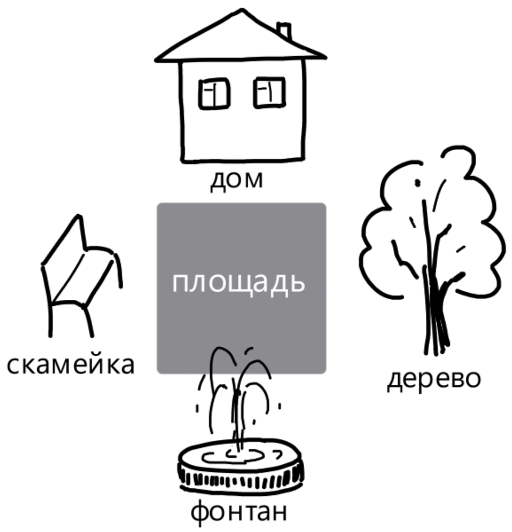
Решение. Поскольку все числа двузначные и идут в порядке возрастания, их первые цифры также идут в порядке возрастания, то есть А < Я < О < У < И. Если два двузначных числа начинаются с одной и той же цифры, то большим из них будет то, у которого больше вторая цифра. Поэтому С < Р, Р < К, К < М, М < Ж, Ж < А. Объединив все полученные неравенства, получим цепочку

$$\text{С} < \text{Р} < \text{К} < \text{М} < \text{Ж} < \text{А} < \text{Я} < \text{О} < \text{У} < \text{И}$$

Остаётся заметить, что Саша использовал ровно 10 различных букв, а значит,

С = 0, Р = 1, К = 2, М = 3, Ж = 4, А = 5, Я = 6, О = 7, У = 8, И = 9.

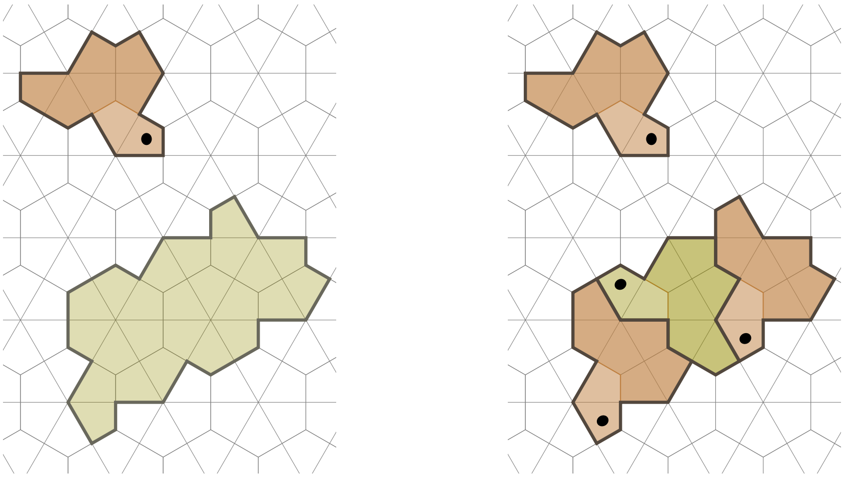
2 (6–7; ответ). На площади стояло несколько человек, каждый лицом к одному из 4 объектов, расположенных как на рисунке. Каждый человек записал, какой объект находится перед ним, какой — слева, а какой — справа. В итоге «дом» было написано 5 раз, «фонтан» — 6 раз, «скамейка» — 7 раз, «дерево» — 9 раз. Сколько человек стояло на площади, и сколько из них стояло лицом к каждому из объектов?



Ответ. Всего было 9 человек, лицом к дому стояло 3, лицом к фонтану — 4, лицом к скамейке — 0, лицом к дереву — 2.

Решение. Всего было написано $5+6+7+9 = 27$ слов. Так как каждый записал по 3 слова (объект впереди, объект слева, объект справа), то всего было $27 : 3 = 9$ человек. Из 9 человек слово «дом» написали пятеро, значит, оставшиеся $9 - 5 = 4$ человека стояли спиной к дому. Заметим, что стоять спиной к дому означает стоять лицом к фонтану — следовательно, лицом к фонтану стояло 4 человека. Аналогично находим, что $9 - 6 = 3$ человека стояли спиной к фонтану и лицом к дому, $9 - 7 = 2$ человека стояли спиной к скамейке и лицом к дереву и, наконец, $9 - 9 = 0$ человек стояли спиной к дереву и лицом к скамейке.

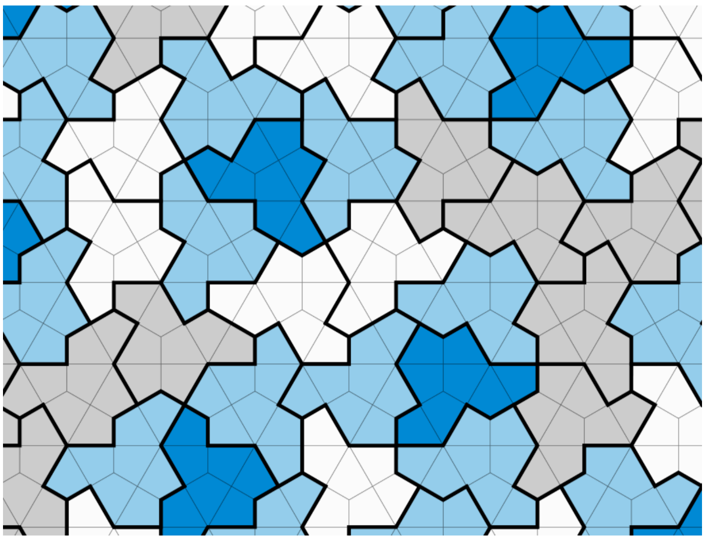
3 (6–8; ответ). Фигуру снизу можно разделить на трёх «дикобразов» (возможно, повёрнутых или перевёрнутых), изображённых на рисунке сверху. Отметьте дольки, в которых окажутся глаза этих дикобразов.



Ответ. См. рисунок.

Комментарий. Разбиение плоскости на многоугольники без дырок и наложений называется *замощением*. Замощения бывают как *периодические* (есть два разных направления, при сдвиге в каждом из которых замощение совмещается само с собой) и *непериодические* (таких сдвигов нет). Ещё в прошлом году не было известно, существует ли многоугольник, которым непериодически плоскость замостить можно, а периодически нельзя. Однако, уже весной 2023 года David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan и Chaim Goodman-Strauss выяснили[1], что с помощью такого «дикобраза», как в задаче, действительно можно замостить плоскость только непериодически! Более того, существует целое семейство многоугольников с таким же свойством.

Чтобы замостить плоскость «дикобразами», их приходится иногда переворачивать. Те же авторы нашли[2] и пример плитки, которой можно замостить плоскость непериодически, не переворачивая её (а замостить периодически тоже нельзя).



[1] https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/
[2] https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre/

4 (7–9; ответ). Назовём натуральное число n *интересным*, если n и $n + 2023$ — палиндромы, то есть числа, одинаково читающееся слева направо и справа налево. Найдите наименьшее и наибольшее интересные числа.

Ответ. 969 и 8778.

Решение. Найдём наименьшее интересное число. Посмотрим для начала, может ли интересное n быть настолько малым, чтобы выполнялось $n+2023 \leqslant 2999$, т.е. $n \leqslant 976$. В этом случае $n+2023$ заключено между 2023 и 2999, и потому начинается на 2 — а значит, и заканчивается тоже. Раз сумма $n+2023$ заканчивается на 2, само n заканчивается на 9. Отметим, что n не может быть ни однозначным ($2023 + 9 = 2032$ — не палиндром), ни двузначным (тогда оно было бы равно 99, а $2023+99 = 2122$ — не палиндром). Значит, n трёхзначное, и имеет вид 9?9. Но тогда сумма $n+2023$ не меньше 2900, и значит, должна равняться 2992. Вычитая, находим $n = 2992-2023 = 969$. Итак, $n = 969$ — это наименьшее интересное число.

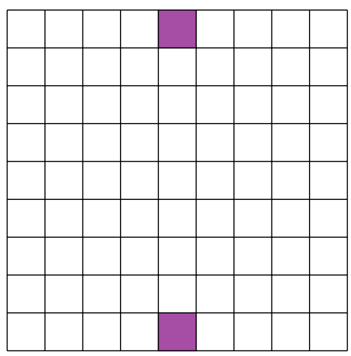
Найдём теперь наибольшее интересное число. Предположим, n — пятизначное или более. При добавлении 2023 либо количество цифр увеличится, и тогда первая цифра изменится с 9 на 1, то есть на 2 (с переходом через десяток), либо количество цифр останется прежним, и тогда первая цифра не изменится или изменится на 1. Но последняя цифра изменяется на 3 (возможно, с переходом через десяток) — противоречие.

Чтобы $2023+\overline{abba}$ было палиндромом, оно должно быть пятизначным. Иначе в разряде сотен цифра b увеличивается на 1 или не изменяется, а в разряде десятков — на 2 или 3. Значит, первая цифра числа $2023 + \overline{abba}$ — это 1, а последняя цифра будет равна 1 только при $a = 8$. В разряде тысяч у числа $2023+\overline{8bb8}$ может быть либо 0, либо 1. Чтобы получить ту же цифру в разряде десятков, $b = 8$ или $b = 7$. Число 8888 не подходит: $8888 + 2023 = 10911$, а вот 8778 — интересное: $8778 + 2023 = 10801$.

Комментарий. Из решения следует, что интересных чисел ровно два.

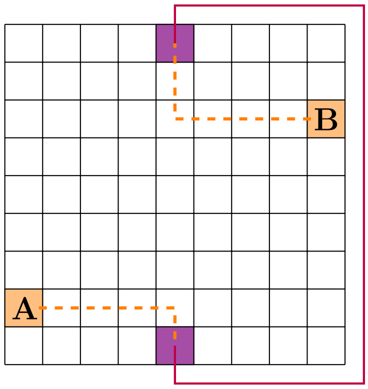
5 (8–10; ответ). Город N представляет собой клетчатый квадрат 9×9. За 10 минут Таня может перейти из любой клетки в соседнюю по стороне. Ваня может открыть в любых двух клетках по станции метро — после этого можно будет перемещаться из одной такой клетки в другую за 10 минут. Отметьте две клетки, в которых Ване нужно открыть метро, чтобы Таня могла добраться из любой клетки города в любую другую за 2 часа.

Ответ. Например, подойдут верхняя и нижняя клетки центрального столбца.



Решение. Откроем метро в самой верхней и самой нижней клетках центрального столбца (отмечены на рисунке фиолетовым). Докажем, что теперь можно добраться из любой клетки A в любую клетку B не более чем за два часа.

Два часа — это 120 минут, то есть, после открытия станций из любой клетки в любую другую нужно добраться не более чем за 12 ходов от клетки к клетке.



Составим маршрут из трёх частей (пример маршрута показан на рисунке):

1) от точки A по горизонтали пройти до центрального столбца — не более 4 ходов;

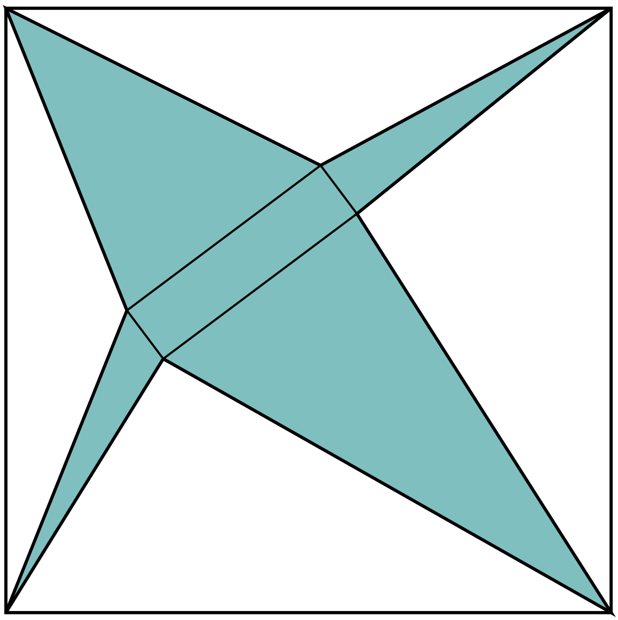
2) по центральному столбцу переместиться из горизонтали, содержащей точку A, в горизонталь точки B;

3) от центрального столбца по горизонтали пройти до точки B — не более 4 ходов.

Посмотрим, сколько ходов может занять второй этап. В центральном столбце 9 клеток, при этом из верхней клетки можно перейти в нижнюю — то есть можно представить центральный столбец как кольцо из 9 клеток. Между любыми двумя клетками этого кольца есть два пути (в одну или в другую сторону), причём кратчайший путь содержит не более 4 ходов. Значит, все три этапа в сумме займут не более $4 + 4 + 4 = 12$ ходов, как и требовалось.

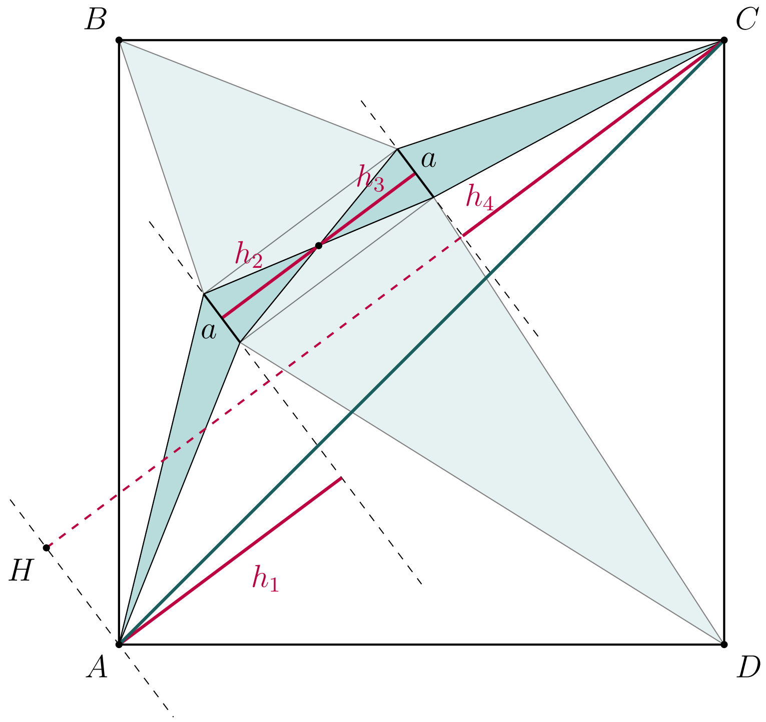
Комментарий. В качестве клеток для станций метро подойдёт также любая пара клеток в концах одного и того же столбца или одной и той же строки, а также пара клеток, отстоящих на одну от концов одного и того же столбца или одной и той же строки.

6 (9–11; ответ). Рассмотрим различные прямоугольники периметра 10, лежащие внутри квадрата со стороной 10. Чему равна наибольшая возможная площадь закрашенной звёздочки (см. рисунок)? Ответ округлите до двух знаков после запятой.



Ответ. $25\sqrt{2} \approx 35,36$.

Решение. Рассмотрим две противоположные стороны прямоугольника. Пусть длина каждой из них равна a. Соединим их с центром прямоугольника и с вершинами квадрата A и C, как это сделано в звёздочке. В четырёх получившихся треугольниках опустим высоты h_1, h_2, h_3 и h_4.



Общая площадь этих четырёх треугольников равна $\frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$. Сумма высот равна проекции CH диагонали квадрата AC на перпендикуляр к выбранным сторонам прямоугольника. Значит, площадь «половины» звёздочки не больше, чем $\frac{1}{2} \cdot a \cdot AC$, и равна этому значению, когда стороны прямоугольника перпендикулярны диагоналям квадрата. Аналогично, площадь оставшихся четырёх треугольников звёздочки, примыкающих к стороне прямоугольника длины b, не больше, чем $\frac{1}{2} \cdot b \cdot BD$. Поэтому площадь всей звёздочки не больше, чем половина произведения диагонали квадрата на полупериметр прямоугольника:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot AC + \frac{1}{2} \cdot b \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10\sqrt{2} \approx 35,36,$$

и это значение достигается, если стороны прямоугольника перпендикулярны диагоналям квадрата.

Комментарий. Из решения также следует, что площадь звёздочки не зависит от размеров сторон прямоугольника (при фиксированном периметре) и не меняется при параллельном переносе прямоугольника — всё зависит лишь от угла его наклона.

7 (10–11; решение). Существует ли число, которое может быть представлено в виде $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, где m и n натуральные, не менее чем ста способами? Ответ объясните.

Ответ. Существует — например, число $\frac{1}{199!}$.

Решение. Число 200 можно представить в виде суммы двух слагаемых 100 способами:

$$200 = 1 + 199 = 2 + 198 = \dots = 99 + 101 = 100 + 100,$$

значит,

$$\frac{200}{200!} = \frac{1}{200!} + \frac{199}{200!} = \frac{2}{200!} + \frac{198}{200!} = \dots = \frac{99}{200!} + \frac{101}{200!} = \frac{100}{200!} + \frac{100}{200!}.$$

Остаётся заметить, что в числителях дробей–слагаемых встречаются только числа от 1 до 199, на которые делится стоящее в знаменателе число 200!. Значит, после сокращения дробей мы получим представление числа $\frac{200}{200!} = \frac{1}{199!}$ как суммы вида $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ ста способами.

Решение 2. Заметим, что

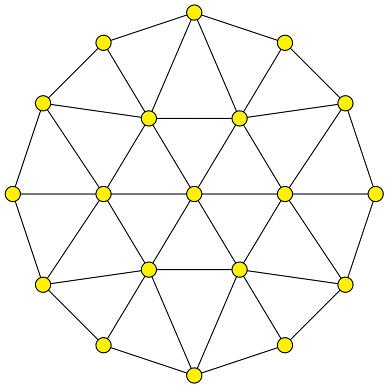
$$\frac{1}{ab} = \frac{(b+1)}{ab(b+1)} = \frac{b}{ab(b+1)} + \frac{1}{ab(b+1)} = \frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{ab(b+1)}.$$

Значит, ответом задачи может служить число $\frac{1}{k}$, где k можно разложить на два множителя 100 разными способами — например, подойдёт $k = 2^{100}$.

8 (11; ответ). У Карабаса–Барабаса есть большой участок земли в форме выпуклого 12-угольника, в вершинах которого стоят фонари. Карабасу–Барабасу нужно поставить внутри участка некоторое конечное число фонарей, разделить его на треугольные участки с вершинами в фонарях и раздать эти участки актёрам театра. При этом каждый внутренний фонарь должен освещать не менее шести треугольных участков (фонарь светит недалеко, только на те участки, в вершине которых стоит). Какое максимальное количество треугольных участков может раздать Карабас–Барабас актёрам?

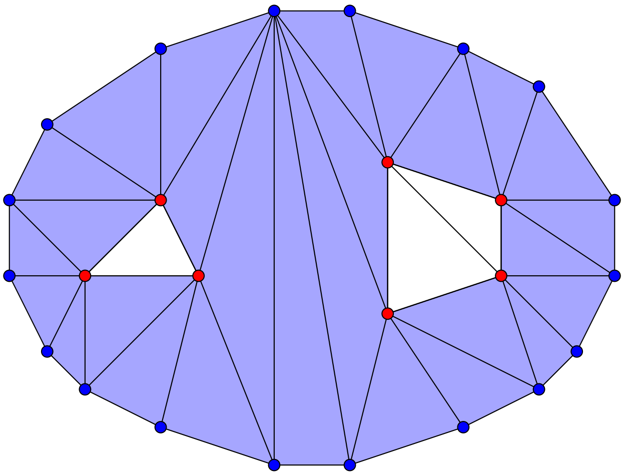
Ответ. 24.

Решение. Нетрудно привести пример, в котором таких участков 24:



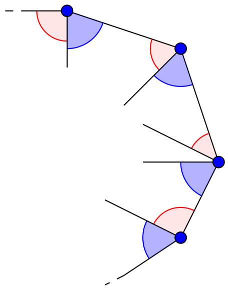
Попробуем доказать, что сделать больше 24 участков не получится. Рассмотрим сначала более общую ситуацию: пусть есть n–угольник с фонарями в вершинах, который разбит на треугольные участки, причём из каждой внутренней вершины (если они есть) выходит по крайней мере 6 отрезков.

Покрасим вершины многоугольника в синий, а все внутренние вершины — в красный. Раскрасим также в синий цвет все треугольники, у которых хотя бы одна из вершин оказалась синей.



Утверждение 1. Синих треугольников не больше, чем $2n-6$.

При каждой из внутренних (красных) вершин сумма по крайней мере 6 углов равна $360°$, значит, в среднем угол с красной вершиной меньше $60°$. Поскольку среднее значение всех углов треугольников равно $180° : 3 = 60°$, то угол с синей вершиной в среднем больше $60°$. Сумма углов с синими вершинами равна сумме углов n–угольника, то есть $180°(n-2)$. Следовательно, углов с синими вершинами не больше, чем $180°(n-2) : 60° = 3(n-2)$. Каждая сторона многоугольника является стороной двух углов; вычеркнем из этих углов те, которые идут позже по часовой стрелке (на рисунке такие углы отмечены красным).

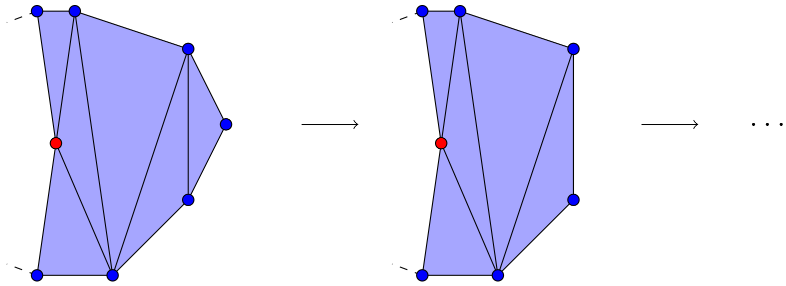


После этого в каждом синем треугольнике останется невычеркнутым хотя бы один синий угол, но всего синих углов останется не более $3(n-2)-n = 2n-6$. Значит, синих треугольников не более, чем $2n-6$.

Утверждение 2. Если внутри n–угольника есть хотя бы одна красная вершина, то найдутся по крайней мере n треугольников, у которых не меньше двух вершин — синие.

Рассмотрим треугольники, примыкающие к сторонам n–угольника (у них по крайней мере две вершины — концы этой стороны — синие). Если к каждой стороне примыкает отдельный треугольник, то их ровно n (и, возможно, есть другие треугольники, имеющие две синие вершины) — утверждение доказано. В противном случае есть треугольник, содержащий ровно две стороны многоугольника (три стороны он содержать не может:

это означало бы, что сам многоугольник — это треугольник, внутри которого нет красных точек). Отрежем этот треугольник; останется $(n-1)$–угольник с синими вершинами, у которого по-прежнему есть внутри хотя бы одна красная вершина, а все треугольники с хотя бы одной синей вершиной покрашены синим.



В $(n-1)$–угольнике, опять же, либо к каждой стороне примыкает отдельный треугольник, либо есть треугольник, две стороны которого являются сторонами многоугольника. В первом случае мы нашли $n-1$ подходящий треугольник, и ещё 1 треугольник отрезали на предыдущем шаге — значит, в исходном n–угольнике было по крайней мере n треугольников с двумя синими вершинами. Во втором случае снова отрежем этот треугольник и продолжим тот же процесс, получая на каждом новом шаге $n-k$–угольник и k отрезанных треугольников. Рано или поздно процесс остановится, поскольку количество сторон уменьшается; в сумме с отрезанными треугольниками получим n треугольников с хотя бы двумя синими вершинами. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Рассмотрим теперь ту часть многоугольника, которая не покрашена синим (она может состоять из одного или нескольких многоугольников).

Утверждение 3. Суммарное количество сторон непокрашенных частей не превосходит $n-6$.

Заметим, что сторона непокрашенной части — это отрезок с концами в красных вершинах, являющийся также стороной синего треугольника (ровно одного). В синем треугольнике с такой стороной ровно одна вершина — синяя. Всего синих треугольников в силу утверждения 1 не более, чем $2n-6$, и в силу утверждения 2 по крайней мере n из них имеют две (или все три) синие вершины. Значит, сторон непокрашенной части, как и синих треугольников с одной синей вершиной, не более чем $2n-6-n=n-6$.

Итак, рассмотрим теперь 12-угольник из задачи. В нём по утверждению 1 не более $12\cdot 2-6=18$ синих треугольников. У оставшейся, непокрашенной, части (или частей) суммарно сторон не более чем $12-6=6$. Отбросим синие треугольники и рассмотрим непокрашенную часть отдельно: снова покрасим синим все вершины на её границе (или границах), а также покрасим синим треугольники, у которых теперь есть хотя бы одна синяя вершина. Поскольку $6-6=0$, все треугольники будут покрашены. При этом по утверждению 1 синих треугольников не более $2\cdot 6-6=6$.

Значит, всего треугольников в разбиении 12–угольника может быть не более $18+6=24$.

Комментарий. Классическая *задача Дидоны*[3] состоит в нахождении среди всех фигур с данным периметром фигуру наибольшей площади (ответ в ней очень естественный: круг — но доказать это не так уж просто). «Задача Карабаса–Барабаса» немного

[3] `http://kvant.mccme.ru/1985/05/carevna_didona_izoperimetry_i.htm`

напоминает задачу Дидоны: в ней тоже надо максимизировать «площадь» (количество треугольных участков) при фиксированном «периметре».

И если нарисовать по линиям треугольной сетки любой многоугольник периметра 12 и площади S треугольничков, то мы увидим схему разбиения участка Карабаса на S треугольных участков (буквально так, правда, получаются только схемы, в которых каждый внутренний фонарь освещает *ровно* 6 участков).

Вариант подготовили: А. В. Антропов, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, П. Е. Закорко, Т. В. Казицына, Т. А. Корчемкина, Г. А. Мерзон, Г. С. Минаев, Н. А. Солодовников, А. А. Тертерян, А. К. Толпыго.

Задания, решения, результаты публикуются на сайте `http://turlom.olimpiada.ru`