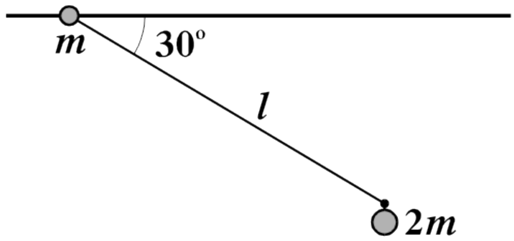


Задача 1. Бусинка массы m может без трения перемещаться по горизонтальной спице. Нерастяжимой нитью длины l она связана с бусинкой массы $2m$. Нить переки-нута через гвоздь, закрепленный под спицей. Вторая бусинка при этом находится у самого гвоздя, а нить образует со спицей угол 30°. Систему отпускают без начальной скорости. Найдите:

а) силу натяжения нити сразу после того, как она перестанет касаться гвоздя;

б) максимальную скорость, которую будет приобретать нижняя бусинка после этого момента;

в) максимальную высоту, на которую она будет подниматься от наинизшего положения.

Массой нити и трением о гвоздь можно пренебречь.

Решение.

В тот момент, когда нить займет вертикальное положение, скорость нижней бусинки будет равна нулю, т.к. эта бусинка движется до этого только по вертикали, а проекции скоростей бусинок на направление нити должны быть в любой момент одинаковы (нить нерастяжима). Скорость же верхней бусинки в этот момент перпендикулярна нити. Обозначим эту скорость через v_0. По закону сохранения энергии

$$2mg(l - l\sin 30^\circ) = \frac{mv_0^2}{2}$$

откуда находим: $v_0 = \sqrt{2gl}$. Для того, чтобы найти силу натяжения нити в этот момент, рассмотрим дальнейшее движение в системе отсчета, связанной с верхней бусинкой. В этой системе отсчета нижняя бусинка будет двигаться по окружности радиуса l (когда нить перестанет касаться гвоздя), причем в нижней точке ее скорость будет равна v_0, а центростремительное ускорение

$$a = \frac{v_0^2}{l} = 2g$$

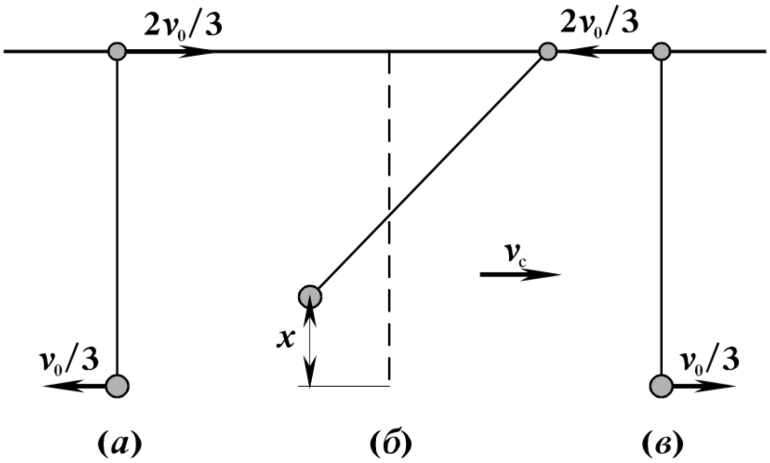
Но в этот момент наша система отсчета является инерциальной (ускорение верхней бусинки относительно земли равно нулю, т.к. сила натяжения нити перпендикулярна спице), поэтому мы можем записать для нижней бусинки 2-й закон Ньютона:

$$2ma = T - 2mg$$

откуда находим силу натяжения нити $T = 6mg$.

Для вычисления максимальной скорости, приобретаемой нижней бусинкой в дальнейшем движении, найдем скорость центра масс системы в момент отрыва нити от гвоздя:

$$v_c = \frac{mv_0}{3m} = \frac{v_0}{3}$$



Горизонтальная составляющая скорости центра масс после этого будет оставаться постоянной, т.к. горизонтальные внешние силы на систему не действуют. Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью v_c. В этой системе бусинки совершают колебания в противофазе, одновременно останавливаясь и приобретая максимальную скорость. Начальная скорость нижней бусинки равна $v_0/3$, верхней — $2v_0/3$ (a). Понятно, что максимальную скорость относительно земли нижняя бусинка будет иметь через половину периода колебания, когда она снова проходит наинизшее положение, но скорость ее направлена по движению центра масс ($в$). Величина этой максимальной скорости

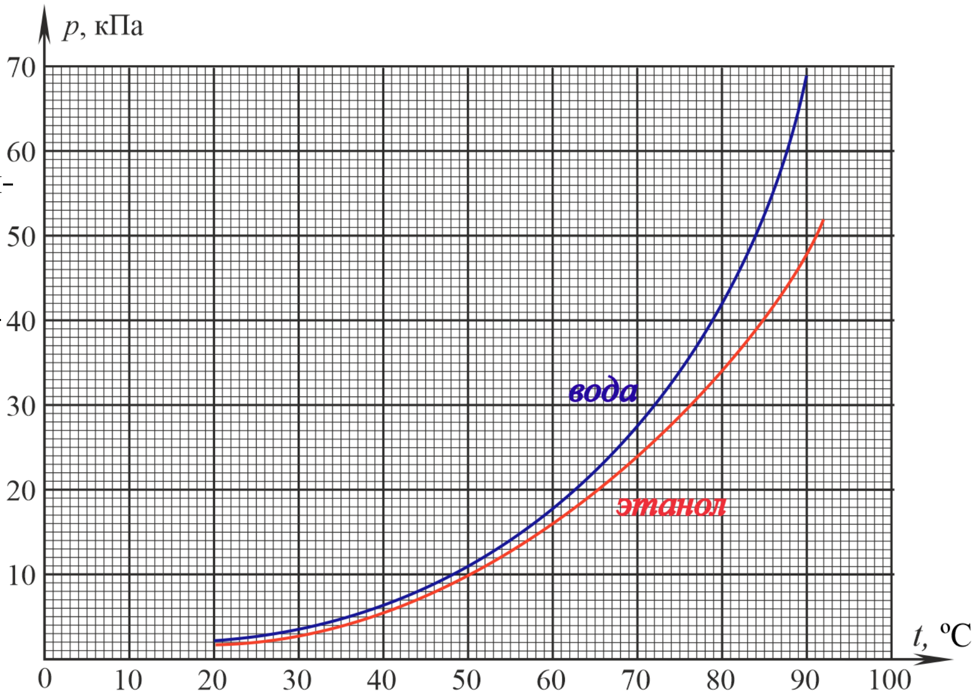
$$v_{max} = v_c + \frac{v_0}{3} = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gl}$$

Максимальную высоту подъема нижней бусинки от наинизшего положения x мы найдем, приравняв энергии системы в моменты (a) и ($б$):

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = 2mgx$$

откуда $x = l/3$.

Задача 2. Как известно, вода и этиловый спирт (этанол, C_2H_6O) при смешивании растворяются друг в друге в любой пропорции. В этом случае, как выясняется, давление насыщенных паров такого раствора *не равно* сумме давлений насыщенных паров его компонентов при той же температуре. Парциальное давление каждого компонента в парах раствора оказывается меньше давления его насыщенных паров и зависит от концентрации этого компонента в растворе.



На рисунке показаны графики зависимости от температуры парциальных давлений воды (верхняя кривая) и этанола (нижняя кривая) в насыщенных парах такого раствора, содержание спирта в котором равно 20% (по массе).

а) Какова температура кипения этого раствора при нормальном атмосферном давлении?

б) Если собрать пары, образующиеся при кипении этого раствора и сконденсировать их – какова будет массовая доля этанола в получившейся жидкости?

в) Какая доля исходного раствора должна выкипеть, чтобы содержание этанола в оставшейся жидкости понизилось до 19%?

Нормальное атмосферное давление считайте равным 101 кПа. Атомная масса водорода равна 1 а.е.м., углерода – 12 а.е.м., кислорода – 16 а.е.м..

Решение.

а) При кипении этого раствора в газовые пузырьки, образующиеся в жидкости, будет испаряться как вода, так и этанол. Поэтому закипит он при той температуре, при которой сумма давлений паров этих компонентов сравняется с атмосферным давлением. По графику находим, что это произойдет при температуре $t_к = 87°$C. Парциальное давление паров воды при этой температуре будет равно $p_1 \approx 58$ кПа, а этанола $p_2 \approx 43$ кПа.

б) Отношение масс компонентов в конденсате будет, очевидно, равно отношению плотностей их паров. Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что плотность газа выражается через его давление p, молярную массу M и абсолютную температуру T:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$$

Поэтому массовая доля этанола в конденсате может быть найдена как

$$\frac{m_2}{m} = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{M_2 p_2}{M_1 p_1 + M_2 p_2}$$

Здесь $M_1 = 18$ г/моль — молярная масса воды, $M_2 = 46$ г/моль — молярная масса этанола. Подставив числа, получаем:

$$\frac{m_2}{m} \approx 0,65$$

В полученном конденсате будет приблизительно 65% этанола.

в) Обозначим массу исходного раствора через m, а искомую долю через x. Масса воды в исходном растворе была $m_1 = 0,8m$, этанола — $m_2 = 0,2m$. После испарения из раствора массы xm масса воды в нем уменьшится на $0,35xm$, а этанола на $0,65xm$, потому что в парах, как мы получили, доля этанола равна 65%, а воды, соответственно, 35%. Правда, эти доли сами зависят от концентрации этанола в кипящей жидкости, а она при кипении снижается. Но, поскольку уменьшается она незначительно (всего лишь с 20% до 19%), изменением концентрации этанола в парах можно пренебречь. Тогда массы воды и этанола в оставшейся жидкости будут равны:

$$m_1' = 0,8m - 0,35xm$$

$$m_2' = 0,2m - 0,65xm$$

По условию требуется, чтобы этанола в этой жидкости стало 19%, то есть

$$\frac{m_2'}{(1-x)m} = 0,19$$

Имеем уравнение:

$$\frac{0,2m - 0,65xm}{(1-x)m} = 0,19$$

Решив его, получаем $x \approx 0,022$. Оказывается, к подобному снижению содержания спирта приведет выкипание всего лишь 2,2% исходной жидкости.

Отметим в заключение, что в задаче описан совершенно реальный технологический процесс ректификации — повышения содержания спирта в спиртосодержащей жидкости.

Задача 3. Выключение тока в цепи, содержащей большую индуктивность, как известно, может привести к электрическому разряду (искровому или даже дуговому) – возникающая при уменьшении тока ЭДС самоиндукции может оказаться настолько большой, что произойдет пробой воздушного промежутка выключателя.

Представим себе, что цепь состоит из последовательно соединенных источника напряжения, нагрузки (обычного резистора), катушки индуктивности и выключателя. Катушка имеет индуктивность порядка $L \sim 1$ *Гн*, линейные размеры контактных пластин выключателя $l \sim 1$ *см*, в выключенном состоянии зазор между ними $d \sim 1$ *мм*. Допустим, его переводят в выключенное положение настолько быстро, что за время выключения ток в цепи не успевает заметно измениться.

а) Оцените максимальную силу тока в цепи, выключение которого еще не приведет к электрическому разряду.

б) Насколько малым должно быть время выключения τ, чтобы предложенное допущение о неизменности силы тока было справедливым? (По сравнению с какой величиной это время должно быть мало?) Насколько реалистично это допущение?

Электрическая прочность сухого воздуха (напряженность электрического поля, при которой в нем возникает пробой) $E_{кр} \sim 10$ *кВ/см*, электрическая постоянная $\epsilon_0 \approx 8,85 * 10^{-12}$ *Ф/м*. Напряжениями на источнике и на нагрузке можно пренебречь по сравнению с ЭДС самоиндукции, возникающей при выключении.

Решение.

а) При разрыве электрической цепи, содержащей большую индуктивность, ток в ней не сможет скачком упасть до нуля. Более того, в первый момент после выключения он должен остаться таким же, каким и был – таково свойство индуктивности. Куда же тогда он потечет, ведь цепь уже разорвана? Он будет заряжать контактные пластины разомкнутого выключателя. Эти пластины будут работать как конденсатор, внезапно возникший в цепи. Сама цепь при этом превратится в колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и паразитной емкости выключателя (поскольку напряжениями на источнике и на нагрузке можно пренебречь по сравнению с ЭДС самоиндукции катушки, их наличие в цепи можно не учитывать). Оценим емкость возникающего при выключении конденсатора. Контактные пластины выключателя, как правило, имеют довольно сложную форму, но для оценки можно считать, что они плоские, и при их раздвигании возникает плоский воздушный конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между ними d. Тогда емкость этого конденсатора

$$C \sim \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Подставив сюда численные данные (не забыв перевести их в систему СИ), получаем С $\sim 10^{-12}$ Ф $= 1$ пФ. Во время движения пластин при выключении емкость этого конденсатора изменяется (потому что меняется расстояние d), однако по условию ток в цепи за это время не успевает заметно измениться. Поэтому можно считать, что конденсатор мгновенно приобретает найденную нами емкость, и дальше она уже не меняется. После этого заряд конденсатора будет увеличиваться, а ток в цепи уменьшаться, как в обычном колебательном контуре. Максимальным напряжение на конденсаторе (а значит, и напряженность электрического поля между его обкладками) станет тогда, когда ток обратится в ноль. Это максимальное напряжение легко найди из закона сохранения энергии, приравняв начальную энергию катушки энергии конденсатора в интересующий нас момент:

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}$$

Отсюда находим максимальное напряжение:

$$U_m = I\sqrt{\frac{L}{C}}$$

и максимальную напряженность электрического поля:

$$E_m = \frac{U_m}{d} = \frac{I}{d}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Максимальный ток, при котором еще не произойдет пробоя, найдем, приравняв эту напряженность электрической прочности воздуха $E_{\text{кр}}$. Тогда получим:

$$I_m = E_{\text{кр}}d\sqrt{\frac{C}{L}} \sim 10^{-3}\text{А} = 1\text{мА}$$

б) Допущение, описанное в задаче, будет справедливым, если время разведения пластин выключателя τ будет много меньше характерного времени изменения тока в цепи после выключения. Этим характерным временем является период колебаний в возникшем колебательном контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Поэтому критерий справедливости допущения:

$$\tau \ll \sqrt{LC} \sim 10^{-6}\text{с}$$

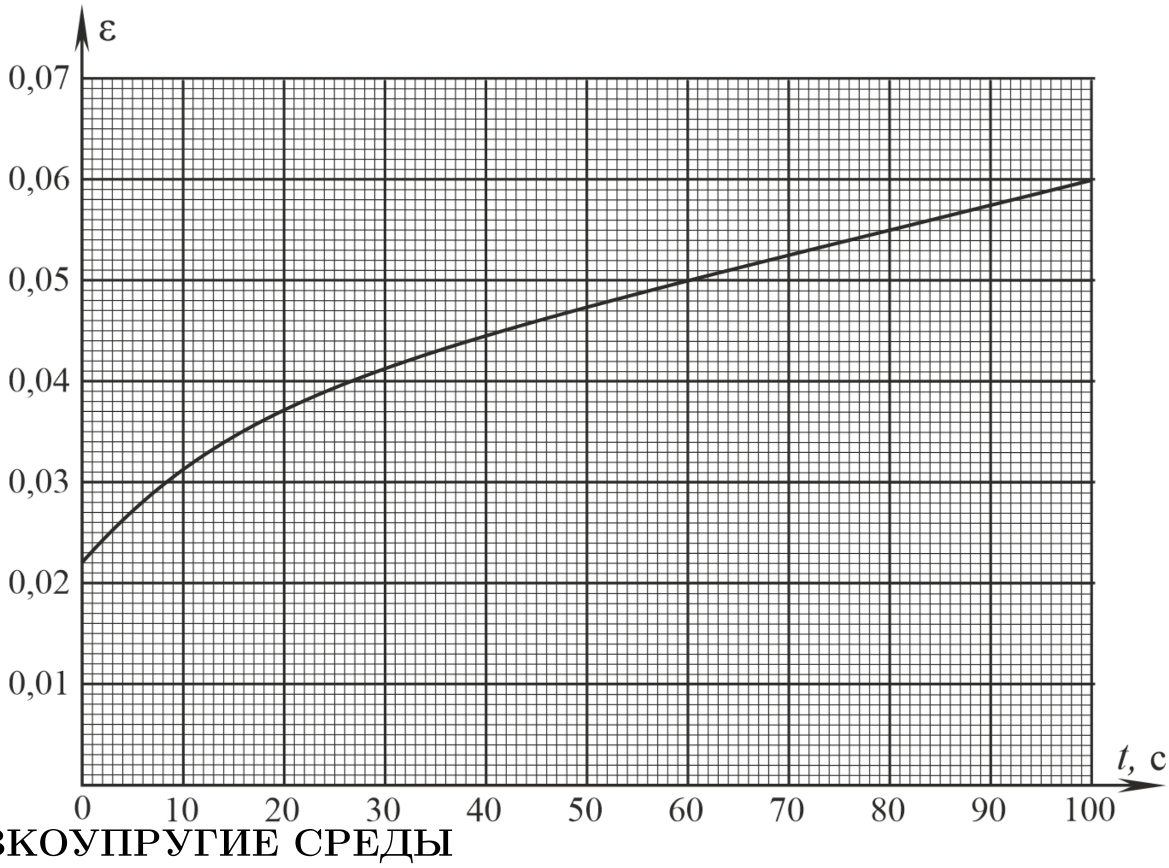
Отсюда видно, что предложенное допущение трудно считать реалистичным — для него требуется, чтобы при размыкании выключателя его пластины двигались со скоростью, не меньшей нескольких километров в секунду!

Задача 4. Прочитайте выданный вам текст «Вязкоупругие среды». Выполните задания:

а) К образцу вязкоупругого вещества в момент времени $t = 0$ прикладывают сдвиговую силу, которая после этого остается постоянной. Нарисуйте (качественно) график зависимости его деформации от времени. Объясните, почему эта зависимость именно такая. Вещество хорошо описывается моделью Максвелла.

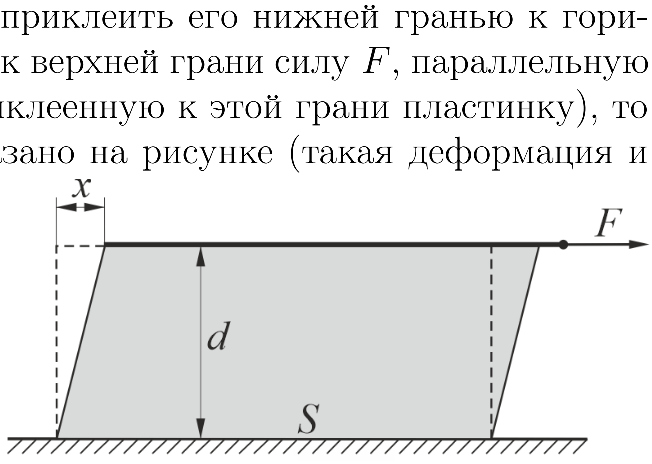
б) То же задание, если вещество описывается моделью Кельвина-Фойгта.

в) В образце вязкоупругого вещества в момент времени $t = 0$ создают сдвиговое напряжение $\sigma = 200$ $Н/м^2$, которое после этого остается постоянным. График зависимости относительной деформации образца от времени приведен на рисунке. В модели Бюргерса найдите с помощью этого графика значения модулей сдвига G_1 и G_2, а также коэффициентов вязкости η_1 и η_2.



ВЯЗКОУПРУГИЕ СРЕДЫ

Чем твердое тело отличается от жидкости? С точки зрения механических свойств они различаются поведением при деформации сдвига. Если из твердого вещества изготовить образец в виде прямоугольного параллелепипеда с площадью основания S и высотой d, приклеить его нижней гранью к горизонтальной поверхности и приложить к верхней грани силу F, параллельную этой грани (например, потянув за приклеенную к этой грани пластинку), то образец деформируется так, как показано на рисунке (такая деформация и называется деформацией сдвига).



При этом, если сила F постоянна, то и деформация x не будет зависеть от времени. Если силу убрать, образец вернется к своей первоначальной форме. Такая деформация и называется упругой. Кроме того, если деформация достаточно мала, она оказывается прямо пропорциональной приложенной силе (закон Гука). В теории упругости этот факт записывают в виде следующего соотношения:

$$\sigma = G\varepsilon \quad (1)$$

Здесь $\sigma = F/S$ – механическое напряжение, $\varepsilon = x/d$ – относительная деформация, G – коэффициент, который называется модулем сдвига данного вещества.

Если же такой эксперимент провести с жидкостью, никакой упругой деформации не возникнет – жидкость просто начнет течь. При этом, поскольку между ее слоями возникают силы вязкого трения, скорость увеличения деформации оказывается прямо пропорциональной приложенной силе:

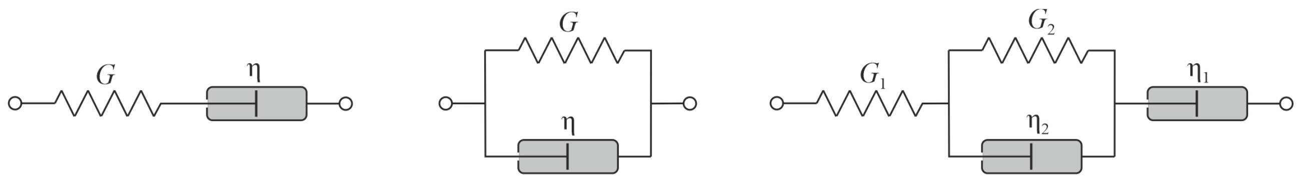
$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} * \quad (2)$$

Величина η называется коэффициентом вязкости данной жидкости.

Так ведут себя обычные твердые тела и обычные (ньютоновские) жидкости. Однако некоторые вещества, как оказалось, удивительным образом проявляют и свойства жидкости (вязкость) и свойства твердых тел (сдвиговую упругость). Такие вещества называют вязкоупругими средами или неньютоновскими жидкостями. К ним относится, например, большинство искусственных полимеров и их растворов в различных растворителях. Из более знакомых вам субстанций свойства вязкоупругости проявляют некоторые пищевые продукты – кетчуп, кондитерский крем и... густая манная каша!

Для описания свойств таких веществ наука *реология* использует механические модели, состоящие из пружин (подчиняются закону Гука (1)) и цилиндров, в которых движение поршня вызывает перетекание вязкой жидкости (подчиняются закону вязкого трения (2)). По-разному соединяя эти элементы, можно получить системы, достаточно точно описывающие механические свойства вязкоупругой среды.

На рисунке показаны основные модели, применяемые этой наукой – модель Максвелла, Кельвина-Фойгта и Бюргерса. Иногда для более точного описания данного вещества используют и более сложные модели, состоящие из большего числа элементов и обладающие большим числом параметров.



модель Максвелла *модель Кельвина-Фойгта* *модель Бюргерса*

* $\dfrac{df}{dt}$ – обозначение производной функции $f(t)$ по времени.

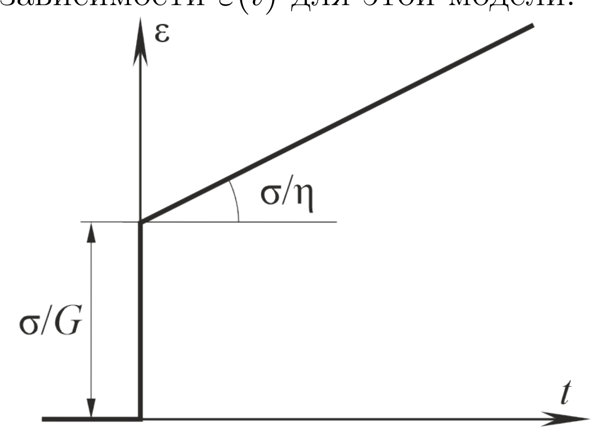
Решение.

Все модели из пружинок и цилиндров, применяемые в реологии, имеют следующий смысл – во многих случаях удается подобрать такую комбинацию этих элементов, у которой зависимость приложенной силы F от деформации x имеет почти такой же вид, как зависимость сдвигового напряжения σ от относительной деформации ε для данной вязкоупругой среды. Поэтому, анализируя далее свойства этих моделей, мы будем говорить про σ и ε, а не про F и x.

а) В модели Максвелла два элемента (упругая пружина (1) и цилиндр с вязкой жидкостью (2)) соединены последовательно. Поэтому растягивающие их силы в любой момент времени одинаковы и равны силе, приложенной к модели, а их деформации складываются и дают полную деформацию устройства:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$
$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Если внешняя нагрузка σ скачкообразно возникает при $t = 0$ и дальше остается постоянной, пружина в этот момент растянется на $\varepsilon_1 = (\sigma/G)$ и будет сохранять эту деформацию неизменной. Деформация цилиндра с вязкой жидкостью не может измениться скачком – сразу после приложения нагрузки она останется нулевой, а дальше будет нарастать с постоянной скоростью: $\varepsilon_2(t) = (\sigma/\eta)t$. Поскольку полная деформация равна сумме ε_1 и ε_2, получаем следующий график зависимости $\varepsilon(t)$ для этой модели:



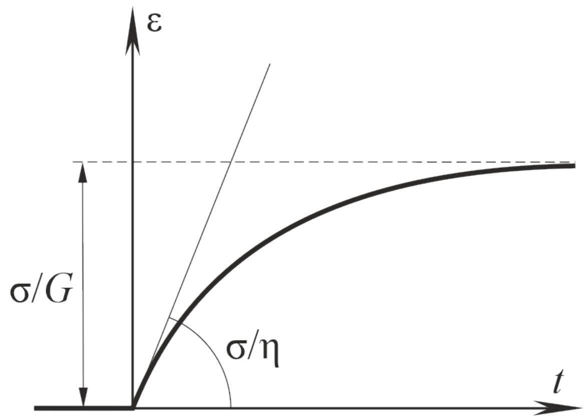
На рисунке вблизи символа угла приведено значение его тангенса, то есть углового коэффициента соответствующей прямой.

б) В модели Кельвина-Фойгта два элемента (упругий и вязкий) соединены параллельно. Поэтому полная нагрузка на это устройство в любой момент будет равна сумме нагрузок на элементы, а деформация каждого из них будет равна деформации устройства:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

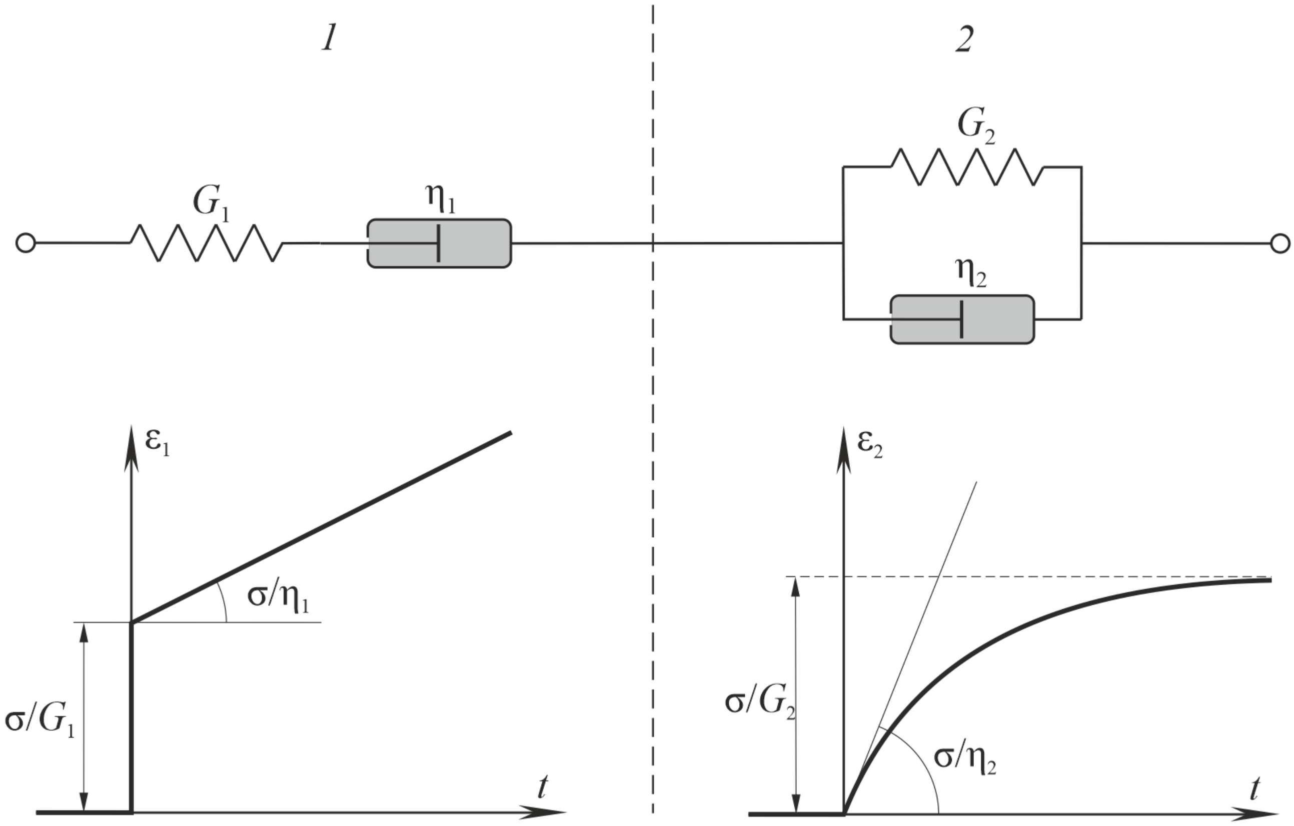
$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Поскольку вязкий элемент не может скачком изменить свою длину, сразу после приложения нагрузки его деформация (а значит, и деформация упругого элемента) будет равна нулю. Значит, в этот момент $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = \sigma$ — вся нагрузка оказывается приложена к вязкому элементу. Соответственно, его деформация начинает расти со скоростью (производной по времени) σ/η. Но по мере роста его деформации растет и деформация упругого элемента. По закону Гука растет и приходящаяся на него нагрузка σ_1, а σ_2, соответственно, уменьшается – скорость роста ε_2 падает. Но пока ε растет, увеличивается и приходящаяся на упругий элемент нагрузка σ_1, а вязкому элементу достается все меньшая доля полной нагрузки, в результате ε_2 растет все медленнее и медленнее. Легко понять, что через достаточно большое время пружина растянется так, что «заберет» себе всю внешнюю нагрузку σ. Нагрузка σ_2 обратится в ноль (точнее, будет стремиться к нулю) и деформация устройства стабилизируется на уровне $\varepsilon = (\sigma/G)$. График, соответствующий описанному процессу, показан на рисунке:



Наклонная прямая – касательная к кривой $\varepsilon(t)$в точке $t = 0$. Ее угловой коэффициент равен σ/η.

в) Для анализа модели Бюргерса разделим ее на две последовательно соединенные секции – так, как показано на рисунке (перенос второго вязкого элемента к первой пружине сделан для удобства изображения, на свойства модели он не влияет):

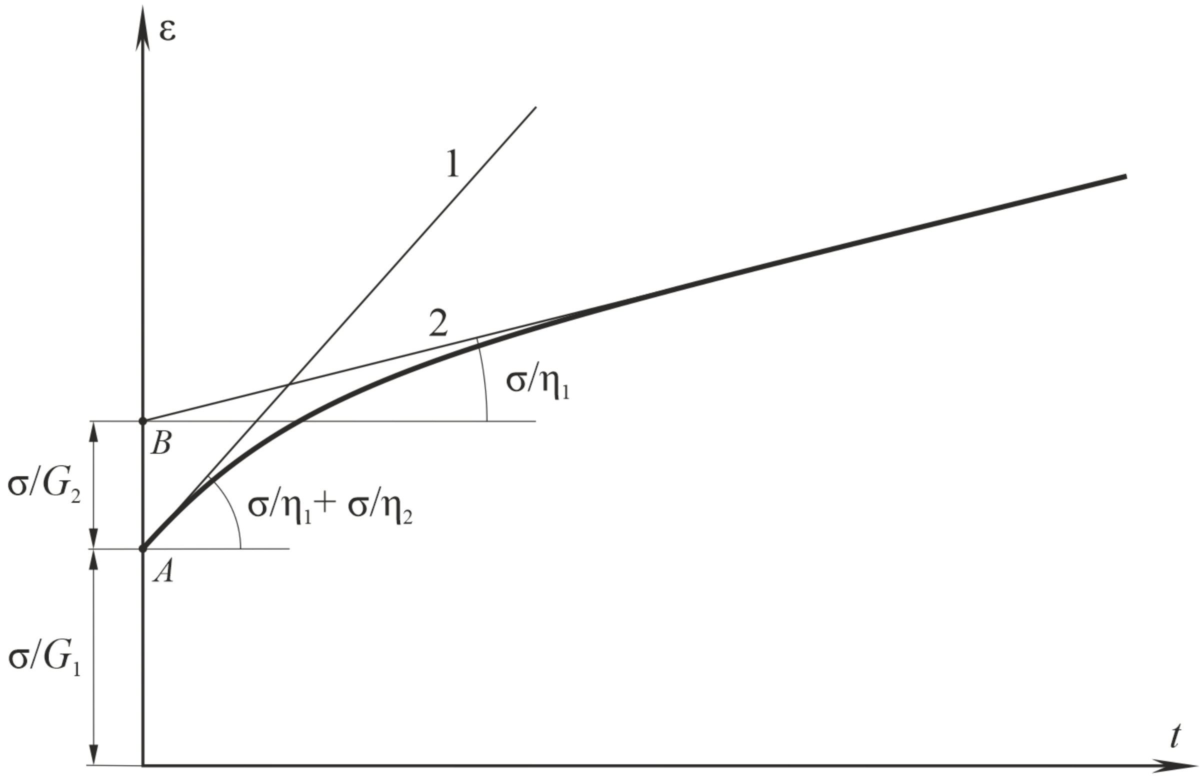


Легко заметить, что первая секция представляет собой модель Максвелла, а вторая – модель Кельвина-Фойгта. Поскольку соединены эти секции последовательно, для них

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Сложив зависимости $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ (их графики показаны на рисунке под соответствующими секциями), получим график, соответствующий приведенной в условии задачи экспериментальной зависимости, причем количественные параметры этого графика будут связаны с параметрами модели Бюргерса так, как показано на рисунке ниже:



Прямая 1 – касательная к графику $\varepsilon(t)$ в точке $t = 0$. Прямая 2 – касательная к этой же кривой при больших t, когда она почти не отличается от прямой. Определив по графику ординаты точек A и B, а также угловые коэффициенты прямых 1 и 2, и использовав известную по условию нагрузку σ, после несложных вычислений получаем:

$G_1 \approx 9,1 \times 10^3 \text{Н}/\text{м}^2$
$G_2 \approx 1,5 \times 10^4 \text{Н}/\text{м}^2$
$\eta_1 \approx 8 \times 10^5 \text{Н} \times \text{с}/\text{м}^2$
$\eta_2 \approx 2,3 \times 10^5 \text{Н} \times \text{с}/\text{м}^2$