

Задание 1.

Пусть $f(x) = |x - 1|$. Решите уравнение $f(f(f(\dots(f(x))\dots))) = 0$ (буква f написана 2021 раз).

Задание 2.

Найдите количество четвёрок положительных целых чисел (a, b, c, d) , таких, что $a \leq b \leq c \leq d$ и

$$a! \cdot b! \cdot c! \cdot d! = 24!.$$

Напомним, что для целого положительного числа n через $n!$ обозначается произведение чисел от 1 до n : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ и так далее.

Задание 3.

Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . На сторонах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что описанная окружность треугольника APQ касается прямой BO , описанная окружность AQO касается прямой CO , а периметр треугольника APQ равен $AB + AC$. Найдите величину угла $\angle BAC$.

Задание 4.

Имеется табло 100×100 , в каждой ячейке которого находится лампочка; исходно все лампочки выключены. К этому табло подключены 200 переключателей: по одному на каждую линию (т.е. строку или столбец). Переключатель меняет состояние всех лампочек той линии, к которой он относится: горящие выключает, негорящие — включает. За 1 минуту 1 горящая лампочка расходует 1 единицу энергии.

Саша раз в минуту нажимает на какой-то переключатель. Он хочет нажать на каждый из переключателей ровно по одному разу. Приведите пример, как Саше нажимать на переключатели, чтобы количество израсходованных единиц энергии было минимально. Не забудьте доказать, что в вашем примере количество израсходованных единиц энергии действительно минимально.

Задание 5.

Фрэнк придумал способ кодирования чисел. Число n кодируется числом a_n по следующим правилам:

$a_1 = 1$; a_n получается из a_{n-1} так: Фрэнк смотрит, какие разряды в десятичной записи числа n отличаются от соответствующих разрядов числа $n - 1$, и увеличивает в десятичной записи числа a_{n-1} на 1 только самый левый из этих разрядов (при этом 9 становится 0, а если разряда ещё не было, то Фрэнк считает, что в нём стоял 0). Например, $a_9 = 9$, $a_{10} = 19$, $a_{11} = 10$, $a_{12} = 11$. Какое число закодировано числом 2021? То есть найдите k , если известно, что $a_k = 2021$.