1 (6-7). У Гриши есть 5000 рублей. В магазине продаются шоколадные зайцы по цене 45 рублей за штуку. Чтобы отнести зайцев домой, Грише придется купить ещё несколько сумок по 30 рублей за штуку. В одну сумку помещается не более 30 шоколадных зайцев. Гриша купил наибольшее возможное количество зайцев и достаточное количество сумок, чтобы донести в них всех зайцев. Сколько денег осталось у Гриши?

Ответ. 20 рублей.

Решение. Полная зайцев сумка стоит $30+30\cdot 45 = 1380$ рублей. Гриша может купить максимум 3 полных сумки и у него останется $5000 - 3\cdot 1380 = 860$ рублей. На эти деньги Гриша может купить четвертую (пустую) сумку и 18 зайцев в неё. В итоге у Гриши останется $860 - 30 - 18\cdot 45 = 20$ рублей.

2 (6). Ёжик может встретить в тумане либо Сивого Мерина, либо Сивую Кобылу, либо своего друга Медвежонка. Однажды Ёжику вышли навстречу все трое, но туман был густой, и Ёжик не видел, кто из них кто, а потому попросил представиться.

Тот, кто, с точки зрения Ёжика, был слева, сказал: «Рядом со мной Медвежонок».

Тот, кто стоял справа, заявил: «Это тебе сказала Сивая Кобыла».

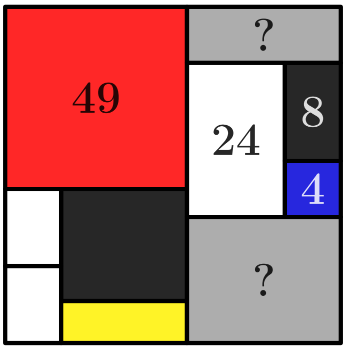
Наконец, тот, кто был в центре, сообщил: «Слева от меня Сивый Мерин».

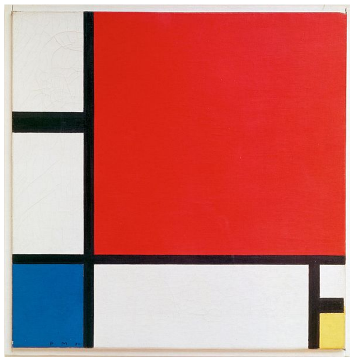
Определите, кто где стоял, если известно, что Сивый Мерин врёт всегда, Сивая Кобыла — иногда, а Медвежонок Ёжику не врёт никогда?

Ответ. С точки зрения Ёжика слева стоит Сивая Кобыла, в центре Сивый Мерин, справа Медвежонок.

Решение. Если Медвежонок слева, то животное в центре — тоже Медвежонок, что невозможно. Если Медвежонок в центре, то справа — Мерин, а левому животному остаётся быть Кобылой, но тогда Мерин сказал правду, что также невозможно. И только если Медвежонок стоит справа, противоречий не возникает: тогда слева стоит Кобыла, а в центре Мерин, причём оба врут.

3 (6-7). Пит М. на квадратном холсте нарисовал композицию из прямоугольников. На рисунке даны площади нескольких прямоугольников, в том числе синего и красного квадратов. Чему равна сумма площадей двух серых прямоугольников?





Ответ. 42.

Решение. Сторона синего квадрата равна 2, поэтому стороны чёрного прямоугольника равны 2 и 4. Площадь бело-чёрно-синего прямоугольника равна 36, а его вертикальная сторона $2 + 4 = 6$. Значит, это квадрат, и его горизонтальная сторона также равна 6. Красный квадрат имеет сторону 7, значит, сторона всего полотна составляет $6 + 7 = 13$. Наконец, площадь серых прямоугольников есть разность площади правой «половины» полотна и бело-чёрно-синего квадрата: $6 \cdot 13 - 36 = 42$.

Комментарий. Это задача по мотивам абстрактных картин нидерландского художника Пита Мондриана (справа приведена «Композиция с красным, синим и желтым» 1930 года).

4 (6-9). На лицевой стороне каждой из 6 карточек Аня написала черным или красным фломастером по натуральному числу. При этом каждым цветом Аня написала хотя бы два числа.

Затем Боря взял каждую карточку, посмотрел, каким цветом на ней написано число, перемножил все Анины числа того же цвета на других карточках и записал результат на обороте карточки (если другая карточка того же цвета всего одна, то Боря пишет число с этой одной карточки).

Мы видим обороты, на которых написаны числа 18, 23, 42, 42, 47, 63. А что написано на лицевых сторонах этих карточек?

Ответ. 7, 47, 3, 3, 23 и 2 соответственно.

Решение. Посмотрим на карточку с надписью «23». Пусть число на лицевой стороне этой карточки написано красным цветом. Тогда среди чисел красного цвета есть число, которое делится на 23. Если чисел красного цвета хотя бы три, на оборотах должны быть хотя бы два числа, которые делятся на 23, но это не так. Значит, чисел красного цвета ровно два и одно из них – на лицевой стороне карточки с числом 23. Чёрным цветом тогда записаны четыре числа.

Аналогичные рассуждения можно провести с числом 47: цвет числа на лицевой стороне карточки с числом 47 встречается два раза, т. е. оно красное. Но тогда на лицевой стороне карточки с числом 23 написано число 47, а с числом 47 — число 23.

Разберёмся теперь с карточками, на которых Аня написала числа чёрным цветом. На их оборотах написаны числа 18, 42, 42 и 63. В их произведение $18 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 63 = 126^3$ каждое из чёрных чисел входит по три раза. Отсюда произведение чёрных чисел равно 126. Тогда на лицевой стороне карточки с числом 18 написано число $126/18 = 7$; с числом 42 — число $126/42 = 3$; с числом 63 — число $126/63 = 2$.

Комментарий. В решении мы воспользовались *леммой Евклида*: «если произведение нескольких чисел делится на простое число, то и хотя бы один из сомножителей делится на него». В решении важно, что числа 23 и 47 — простые.

Для составных чисел аналогичное утверждение неверно: для каждого составного числа d можно придумать два числа a и b, каждое из которых не делится на d, а их произведение делится. Например, ни число 2, ни число 3 не делится на 6, а вот их произведение $2 \cdot 3$ делится на 6.

Лемма Евклида — пример не самого простого утверждения, доказательство которого, тем не менее, в школе опускается. А применение аналогичного утверждения для составных чисел — пожалуй, одна из самых частых ошибок при решении задач по теории чисел.

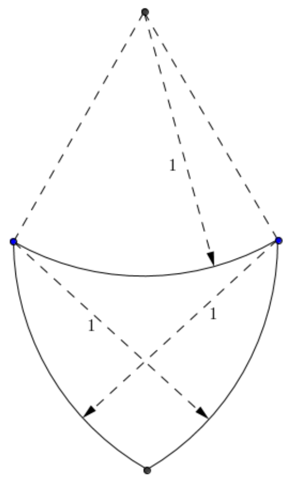
Подробнее про лемму Евклида и его алгоритм, а также основную теорему арифметики можно прочитать, например, в статье В. Н. Вагутен «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики» (журнал «Квант», 1972 г., № 6; `http://kvant.mccme.ru/1972/06/algoritm_evklida_i_osnovnaya_t.htm`).

5 (7-11). На контурной карте России 85 регионов. Вовочка хочет покрасить на карте каждый регион в белый, синий или красный цвет так, чтобы белый и красный цвета не имели общей границы. При этом один или даже два цвета можно не использовать. Докажите, что количество вариантов такой раскраски нечётно.

Решение. Каждому варианту раскраски, в котором есть хотя бы один регион белого или красного цвета, можно назначить *пару*: вариант раскраски, где все белые регионы перекрашены в красный цвет, а все красные — в белый. При этом вариант изменится, а белый и красный цвета всё ещё не будут граничить.

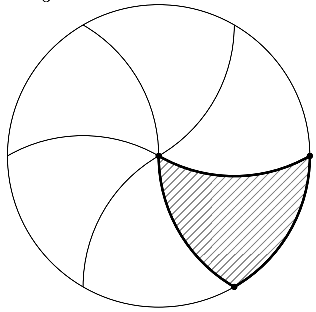
Тогда вариантов раскраски, где есть хотя бы один регион белого или красного цвета, чётно, ведь они все разбились на пары! Остался ещё один вариант, где все регионы России покрашены в синий цвет. Значит, общее количество раскрасок нечётно.

6 (8-9). Король Артур хочет заказать кузнецу новый рыцарский щит по своему эскизу. Король взял циркуль и нарисовал три дуги радиусом 1 ярд так, как показано на рисунке. Чему равняется площадь щита? Ответ округлите до сотых. Напомним, что площадь круга радиуса r равна πr^2, $\pi \approx 3,14$.



Ответ. $0,52$.

Решение. Круг радиуса 1 ярд с центром в любом из верхних углов щита можно целиком замостить шестью щитами без наложений, поворачивая щит пять раз вокруг выбранной вершины на $60°$. Следовательно, площадь щита составляет одну шестую долю площади круга радиуса 1, то есть $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 \approx \frac{1}{6} \cdot 3,14 \approx 0,52$.



7 (8-11). Марина купила тур в Банановую страну с 5 по 22 октября. Ввозить и вывозить бананы через границу запрещено. Банановый король в начале каждого месяца издаёт указ о ценах. Цена одного банана в местной валюте на нужные числа октября приведена в таблице:

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
8,1	8	7	8,1	9	8	8,1	7,2	7	8	9	8,1	9	8	9	8,2	7	7,1

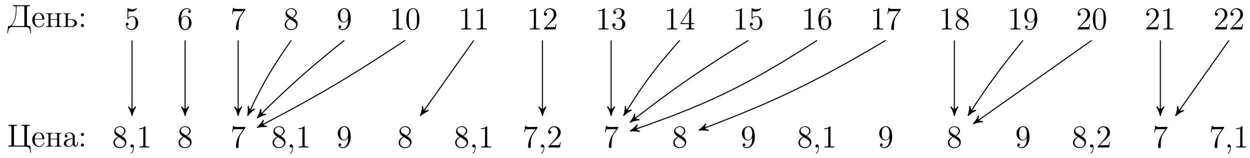
Марина хочет ежедневно съедать по одному банану. Она любит только зелёные бананы, поэтому согласна съесть банан только в течение 4 дней после покупки. Например, банан, купленный 5 октября, Марина согласна съесть 5, 6, 7 или 8 октября. Марина может запасаться бананами, когда они подешевле.

В какие дни по сколько бананов надо покупать Марине, чтобы потратить как можно меньше денег?

Ответ. 1, 1, 4, 0, 0, 1, 0, 1, 4, 1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 2, 0.

Решение. Чтобы решить задачу, достаточно правильно на неё посмотреть. Вместо того, чтобы думать, сколько бананов покупать в каждый день, давайте *для каждого дня выберем, в какой из дней купить банан*! Для этого надо выбрать самую низкую цену из четырёх: текущего дня и трёх предыдущих (если предыдущих дней меньше трёх, то смотрим только на те, что есть).

Для каждого дня на диаграмме ниже стрелкой указана самая низкая цена из доступных. Соответственно, в каждый из дней следует купить столько бананов, сколько стрелок указывают на цену под этим днём.



Получаем ответ:

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	4	0	0	1	0	1	4	1	0	0	0	3	0	0	2	0

8 (10-11). Приведите пример таких целых чисел a, b, c, d, среди которых нет одинаковых, что $a^b = c^d$ и $b^a = d^c$.

Ответ. $2^{-4} = 4^{-2}$, $(-4)^2 = (-2)^4$.

Комментарий. Можно доказать, что этот пример единственный с точностью до перестановок чисел.

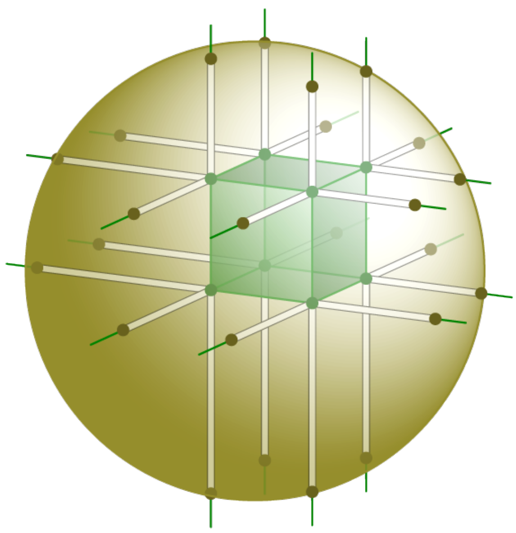
9 (10–11). Известно, что если у правильного N-угольника, находящегося внутри окружности, продлить все стороны до пересечения с этой окружностью, то $2N$ добавленных к сторонам отрезков можно разбить на две группы с одинаковой суммой длин.

А верно ли аналогичное утверждение для находящегося внутри сферы

а) произвольного куба;

б) произвольного правильного тетраэдра?

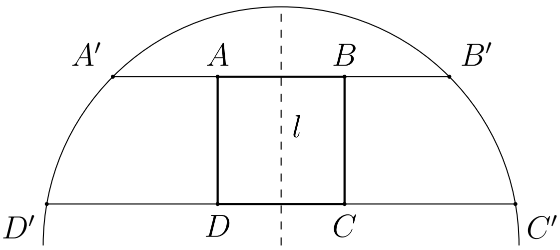
(Каждое ребро продлевают в обе стороны до пересечения со сферой. В итоге к каждому ребру добавляется по отрезку с обеих сторон. Требуется покрасить каждый из них либо в красный, либо в синий цвет, чтобы сумма длин красных отрезков была равна сумме длин синих.)

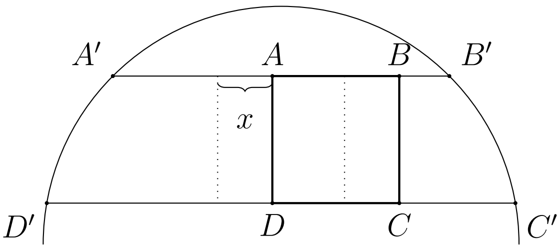


Ответ. Для куба утверждение верно, для правильного тетраэдра — не верно.

Решение. а) Посмотрим сначала на горизонтальные отрезки. Они получаются продолжением сторон квадратов (верхней и нижней грани куба) внутри кругов. Поэтому их можно разбить на две группы с одинаковой суммой.

Достаточно теперь разбить на две группы с одинаковой суммой 8 вертикальных отрезков. Посмотрим на 4 из них, лежащие в одной плоскости. Мы видим квадрат $ABCD$ внутри круга, стороны AB и CD которого продлили до пересечения с этим кругом (точки A', B', C', D').





Докажем, что $AA' + CC' = BB' + DD'$. Общий перпендикуляр l к хордам $A'B'$ и $C'D'$ — ось симметрии окружности. Поэтому если l является осью симметрии и квадрата, то утверждение очевидно. А иначе — сдвинем квадрат вдоль наших хорд так, чтобы l стал его осью симметрии — если при этом AA' и DD' увеличиваются на x, то BB' и CC' на x уменьшаются, поэтому на равенство такой сдвиг не влияет.

Итак, мы разделили наши отрезки на несколько групп (две группы горизонтальных отрезков и две группы вертикальных отрезков), каждую из которых разбили на две «половины» с одинаковыми суммами длин. Утверждение пункта а) доказано.

Комментарий. Можно было и не пользоваться в первом абзаце утверждением про квадрат в круге — в третьем абзаце мы его фактически доказали.

Утверждение про многугольник в круге (для равностороннего пятиугольника) предлагалось на Всероссийской математической олимпиаде 1989 года (задача 8 для 8 класса).

б) Если у тетраэдра одна вершина в центре сферы, а три другие лежат на её поверхности, отрезков фактически три и все равны радиусу сферы r. Три равных отрезка нельзя разбить на две группы с равными суммами длин: в одной из групп будет «перевес» хотя бы на целый радиус.

И даже если три другие вершины лежат не на самой сфере, но близко к ней, то длины всех девяти исходящих из них отрезков не смогут покрыть «перевес» в радиус между двумя группами. Проведем точную оценку: если ребро тетраэдра равно a, то три вершины лежат на сфере радиуса $a < r$. Тогда любой из девяти выходящих из них отрезков не превосходит $\sqrt{r^2 - a^2}$ (например, это следует из теоремы о касательной и секущей). Осталось подобрать радиус a так, что $9\sqrt{r^2 - a^2} < r$. Это выполняется при $a > \sqrt{\frac{80}{81}}r$.

Задачи и решения подготовили:
А. В. Антропов, М. И. Ахмеджанова, Г. А. Гальперин, С. А. Дориченко, О. А. Заславский,
Т. В. Казицына, Т. А. Корчемкина, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, И. В. Раскина,
Н. А. Солодовников, М. А. Хачатурян, М. Е. Шешукова, Д. Э. Шноль.

Задания, решения, результаты будут появляться на сайте `http://turlom.olimpiada.ru`