Задача 1.

Пусть сумма чисел $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ равна $\frac{a_n}{b_n}$, где a_n и b_n — взаимно простые числа. Верно ли, что $b_{n+1} > b_n$ при всех n?

Задача 2.

Две непересекающиеся окружности радиусами 1 и 3 вписаны в угол POQ, где P — точка касания стороны угла с первой окружностью, а Q — точка касания другой стороны угла со второй окружностью. Общая внутренняя касательная окружностей AB пересекает луч OP в точке A, а отрезок OQ в точке B. Найдите AB, если $OP = 3$.

Задача 3.

На плоскости нарисовано множество единичных окружностей так, что каждая прямая на плоскости пересекает хотя бы одну окружность. Обязательно ли найдётся прямая, пересекающая бесконечно много окружностей?

Задача 4.

Уравнения $x^2+px+q=0$ и $x^2+p\{x\}+q=0$ имеют 1 и 2 корня соответственно. Докажите, что $q<1$.
(Через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа — число из полуинтервала $[0;1)$ такое, что число $x-\{x\}$ — целое.)

Задача 5.

На координатной плоскости нарисован треугольник с вершинами в точках с целочисленными координатами. Известно, что внутри этого треугольника находится ровно одна точка с целочисленными координатами. Какое наибольшее количество точек с целочисленными координатами (не считая вершин) может лежать на сторонах этого треугольника?