# Матигры – 2017.

**«Две змеи».** Двое по очереди закрашивают клетки поля $m \times n$, каждый своим цветом. Первым ходом они закрашивают противоположные угловые клетки. Далее каждый ведёт свою «змейку», всякий раз закрашивая клетку, соседнюю по стороне с той, что он красил предыдущим ходом. «Змейкам» соперников запрещено соприкасаться по стороне клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр? Рассмотрите случаи:

а) $m = n = 9$;

б) $m = 8$, $n = 10$;

в) $m = 9$, $n = 10$;

г) $m = 2$, $n = 15$;

**Решение.**

а) Побеждает второй игрок. Укажем две разные стратегии, основанные на симметрии. Можно делать ходы, симметричные ходам первого относительно центра поля (и эта стратегия работает для любых $m$ ти $n$ одинаковой чётности), можно отвечать на ходы первого симметрично относительно диагонали квадрата (эта стратегия работает для любого квадратного поля). Очевидно, что первый игрок не может занять центральную клетку (клетку диагонали), так как в силу симметрии второй игрок при этом был бы в соседней клетке.

б) Побеждает второй игрок. Работает центрально-симметричная стратегия, описанная выше.

в) Побеждает начинающий. Закрасив угол, он мысленно отрезает от поля квадрат $9 \times 9$, не содержащий этого угла. Далее закрашивает угол этого квадрата и играет на этом квадрате как второй игрок в пункте а), используя симметрию относительно диагонали. Ясно, что второй игрок не выйдет за пределы квадрата и рано или поздно проиграет. Такая стратегия работает для любого поля вида $m \times (m + 1)$.

г) Побеждает начинающий. Его стратегия — вести «змейку» вдоль длинной стороны. Построив прямую змею из $\mathbf{8}$ клеток, он поворачивает и затем идёт обратно. Так первый игрок закрасит $\mathbf{16}$ клеток — больше половины,— и поэтому он победит. Сделать первые $\mathbf{8}$ ходов соперник ему не помешает — не успеет дойти до соседней клетки. Повернуть может помешать, но только если сам будет тоже идти вдоль длинной стороны. Однако в этом случае следующего хода у него не будет, и он проиграет. Стратегия применима при $n = 2$ и нечётном $m$.

**«Монеты».** В банке хранится $N$ монет ($N$ — нечётное число). Два игрока по очереди берут себе монеты из банки. За один ход можно взять одну или две монеты. Когда банка опустеет, игра закончится. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или его соперник, если:

а) $N = 7$, а выигрывает тот, у кого по окончании игры окажется **чётное число** монет;

б) $N = 7$, а выигрывает тот, у кого по окончании игры окажется **нечётное число** монет;

в) $N = 9$, а выигрывает тот, у кого по окончании игры окажется **четное число** монет;

г) Разберите общий случай: кто выигрывает в зависимости от $N$ если для выигрыша требуется чётное число монет в итоге, и кто — если нечётное?

Решение.

а) Побеждает первый игрок, взяв **2**. Если второй берёт **2**, первый снова берёт **2** и побеждает. Если второй берёт **1**, первый тоже берёт **1**. Теперь что бы ни взял второй, первый возьмёт **1** и победит.

б) Побеждает второй игрок. Что бы ни взял первый, второй берёт монету. Потом первый снова делает ход и теперь у него **2**, **3** или **4** монеты, а у второго пока **1**. Если у первого **3** или **4** монеты, второй берёт **2** и побеждает, иначе он берёт **1**, и теперь у обоих по **2**. Далее первый берёт что пожелает, а второй **1** — и выигрывает.

в) Побеждает второй игрок. Если первый берёт $\mathbf{2}$, то на чётность количества монет у игроков это не влияет, так что их можно просто выбросить. Теперь на столе $\mathbf{7}$ монет, а игроки поменялись ролями. Из пункта а) мы знаем, что теперь победит тот, чей сейчас ход, то есть в данном случае второй. Если же первый начнёт с одной монеты, то и второй возьмёт одну монету. Теперь можно считать, что на столе $\mathbf{7}$ монет, роли игроков остались прежними, зато поменялась цель игры — теперь надо собрать у себя НЕЧЁТНОЕ число монет. А это, как мы знаем из б), удастся именно второму.

г) Если для победы требуется собрать у себя чётное число монет, то первый побеждает при $\boldsymbol{N = 4k + 3}$, а второй — при $\boldsymbol{N = 4k + 1}$, а если нечётное — наоборот. Докажем это индукцией по $\boldsymbol{N}$. База $\boldsymbol{N = 1}$ очевидна. Пусть этот факт установлен для всех нечётных чисел вплоть до некоторого $\boldsymbol{N}$. Рассмотрим $\boldsymbol{N + 2}$.

Следующие рассуждения практически повторяют изложенные в в).

Если для $\boldsymbol{N}$ выигрывал второй, то для $\boldsymbol{N + 2}$ выиграет первый, взяв $\mathbf{2}$ и передав ход.

Если для $\boldsymbol{N}$ выигрывал первый, то то для $\boldsymbol{N + 2}$ выиграет второй. В самом деле, если первый возьмёт $\mathbf{2}$, то он совершит ошибку, передав второму право начинать игру для $\boldsymbol{N}$. Если же первый возьмёт $\mathbf{1}$, то и второй тоже возьмёт $\mathbf{1}$, и теперь на столе $\boldsymbol{N}$ монет, а игроки играют в ПРОТИВОПОЛОЖНУЮ игру, где как раз-таки побеждает именно второй.

**«Весы».** Есть $\boldsymbol{N}$ гирь, которые весят $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$,..., $\boldsymbol{N}$ граммов. Двое по очереди кладут на весы по одной гирьке. Каждый кладёт гирьку на свою чашу, причём так, чтобы своя чаша после сделанного хода перевесила. Тот, кто не может сделать ход по правилам, считается *победителем*.

Кто выиграет при правильной игре, начинающий или его соперник, если:

а) $\boldsymbol{N = 4}$;

б) $\boldsymbol{N = 7}$;

в) $\boldsymbol{N = 8}$;

г) $\boldsymbol{N = 99}$;

д) $\boldsymbol{N = 98}$?

е) Петя и Вася сыграли для $\boldsymbol{N = 8}$, Петя ходил первым. В итоге на весы были выложены все восемь гирек, после чего Петя выиграл. Докажите, что Вася мог выиграть, но упустил свой шанс.

Решение.

а) Побеждает второй, в чём несложно убедиться, перебрав возможные ходы первого. Если первый кладёт $\mathbf{4}$, то второй уже выиграл. Если первый кладёт $\mathbf{3}$, второй кладёт $\mathbf{4}$, первый вынужден класть $\mathbf{2}$, и второй побеждает, не имея хода. Если первый кладёт $\mathbf{2}$, второй и первый вынужденно кладут $\mathbf{3}$ и $\mathbf{4}$ в каком-то порядке, и второй выиграл. Наконец, если первый кладёт $\mathbf{1}$, второй кладёт $\mathbf{3}$, первый тогда $\mathbf{4}$, и у второго опять нет хода, что означает его победу.

б, г, д) Покажем, как первый может победить при любом $\boldsymbol{N > 4}$, не кратном $\mathbf{4}$. Он кладёт на свою чашу $\boldsymbol{N - 1}$, а второй на свою вынужденно кладёт $\boldsymbol{N}$. Затем первый кладёт $\boldsymbol{N - 3}$, второй обязан положить $\boldsymbol{N - 2}$ (из оставшихся гирек даже $\boldsymbol{N - 5}$ ему не хватит). Теперь четыре самые тяжёлые гири лежат на весах, чаша второго тяжелее на $\mathbf{2}$ грамма. Каждой следующей парой ходов игроки теперь будут "разыгрывать" две самые тяжёлые гири из оставшихся, причём первый игрок будет добиваться того, чтобы после хода второго его чашка перевешивала на $\mathbf{1}$ или $\mathbf{2}$ грамма, причём эти значения он будет строго чередовать.

Первый игрок действительно может это сделать. Пусть в какой-то момент самые тяжёлые гири имеют массы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{m - 1}$. Если был перевес в $\mathbf{2}$ грамма, первый кладёт себе $\boldsymbol{m}$, второй вынужден положить $\boldsymbol{m - 1}$ ($\boldsymbol{m - 2}$ ему не хватит, будет равновесие), и перевес станет в $\mathbf{1}$ грамм. Если был перевес в $\mathbf{1}$ грамм, первый кладёт себе $\boldsymbol{m - 1}$, второй вынужден положить $\boldsymbol{m}$ ($\boldsymbol{m - 2}$ ему не хватит, снова будет равновесие), и перевес станет в $\mathbf{2}$ грамма.

При нечётном $N$ при такой игре со временем на весах будут все гири, кроме **1**, перевес на **1** грамм при этом будет у второго. Ход будет за первым, но гирю **1** он положить не сможет.

При чётном $N$, но не кратном **4** при такой игре со временем на весах будут все гири, кроме **1** и **2**, при этом у второго будет перевес на **2** грамма. Ход за первым, но ни гирю **1**, ни гирю **2** он положить не может.

в) Случай $N = 4k$ сложнее для исследования, и описанная выше стратегия для него не сработает. Пункт (а) даже позволяет заподозрить, что побеждает второй, но при $N = 8$ это всё-таки может сделать первый. Для этого он кладёт гирю **6**. После этого второй теоретически может положить **7** или **8**.

Если второй кладёт **7**, он проигрывает: первый кладёт тогда **5**, второй **8** (у него нет выбора), и теперь чаша второго перевешивает на **4** грамма, так что у первого нет хода.

Если второй кладёт **8**, то первый снова кладёт **5**. Если второй положит **8**, то он тут же проиграет, а если **4**, то первый может положить **3**. Теперь второму ничего не остаётся как положить **7**, и первый может праздновать победу.

е) Если все гири оказались на весах, то первым ходом Петя положил **1**, потому что никаким ходом, кроме первого, **1** положить нельзя: кладя на более лёгкую чашку **1** можно разве что выровнять чашки, но не добиться перевеса. На этот ход умный Вася мог бы положить **7**. Петя тогда положил бы **8** (а что ему ещё делать?), Вася **6**, Петя (вынужденно) **5**, Вася **3**, Петя (вынужденно) **4**, и тут у Васи, к его радости, возможности ходить больше бы не было.