Конкурс по математике. Ответы и решения

(предварительная версия от 01.10.2017)

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

1. (6–7) Саша и Илья должны были пробежать 600 метров. Но Саша первую половину *времени* бежал, а вторую — шёл. А Илья первую половину *дистанции* бежал, а вторую — шёл. И стартовали, и финишировали мальчики одновременно. Ходят они оба со скоростью 5 км/ч. С какой скоростью бежал Илья, если Саша бежал со скоростью 10 км/ч?

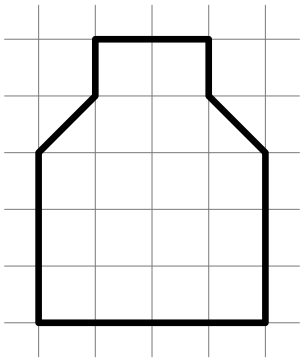
Ответ. 15 км/ч.

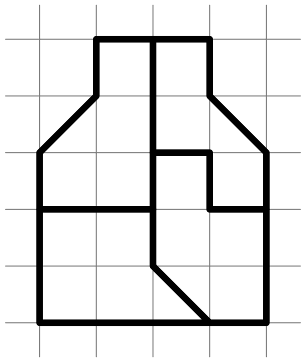
Решение. Поскольку Саша бежит в два раза быстрее, чем идёт, то и пробежит он в два раза больше, чем пройдёт. Значит, Саша пробежит 400 метров, а пройдёт 200 метров. Поскольку ходят мальчики с одной скоростью, последние 200 метров они пройдут вместе. Следовательно, пока Саша бежал 400 метров, Илья пробежал 300 метров и прошёл 100 метров. Поскольку Саша бегает в два раза быстрее, чем ходит Илья, то пока Илья шёл 100 метров, Саша пробежал 200 метров. А пока Саша бежал $400 - 200 = 200$ метров, Илья пробежал 300 метров.

Значит, Илья бегает в полтора раза быстрее Саши, т.е. со скоростью 15 км/ч.

2. (6–7) Разрежьте фигуру ниже на 4 части одинакового *периметра* так, чтобы любые две части были *не* равны между собой.

Решение. Существует очень много способов, один из них приведён на рисунке.

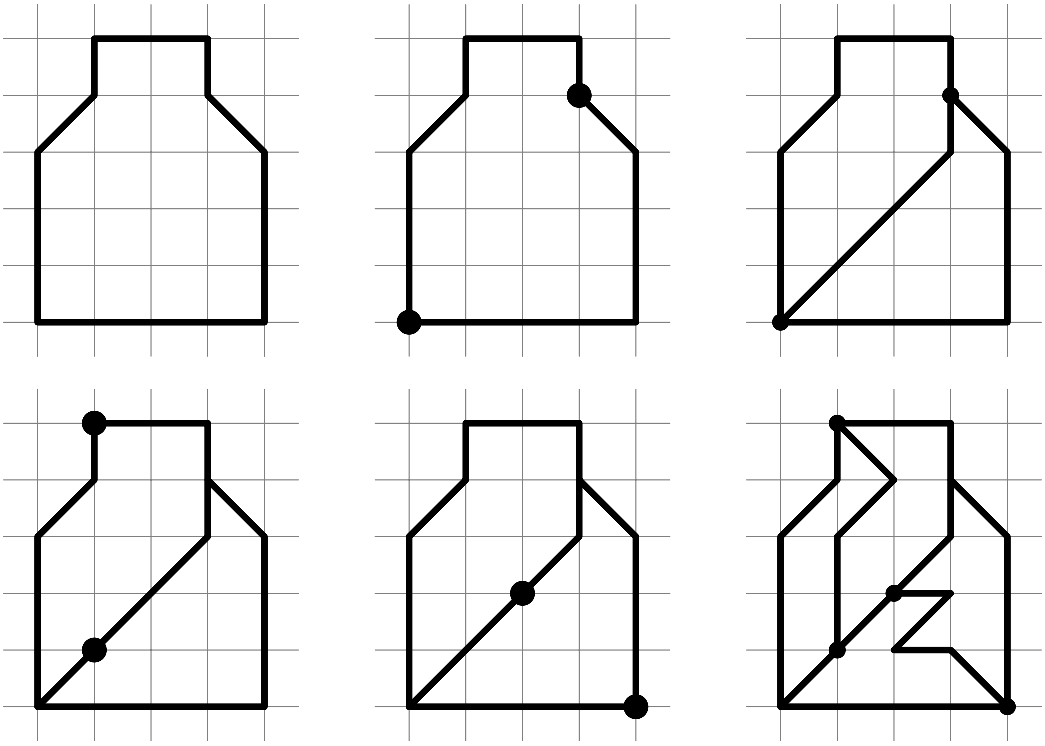




Комментарий. Бесконечно много разных решений можно получить следующим образом. Отметим на границе фигуры две точки, которые делят периметр фигуры на две части равной длины и соединим их любой кривой. Получатся две части равного периметра.

После этого снова отметим на границе каждой из фигур пары точек, делящих их периметр на две равные части; дальше соединим каждую из пар точек линиями одинаковой длины. В результате получатся 4 фигуры одинакового периметра, при этом очень вряд ли они будут равны.

Меняя выбор точек и соединяющих их кривых, можно получать очень много различных примеров.



3. (6–8) Состоялся матч по футболу 10 на 10 игроков между командой лжецов (которые всегда лгут) и командой правдолюбов (которые всегда говорят правду). После матча каждого игрока спросили: «Сколько голов ты забил?» Некоторые участники матча ответили «один», Миша сказал «два», некоторые ответили «три», а остальные сказали «пять». Лжёт ли Миша, если правдолюбы победили со счётом $20 : 17$?

Ответ. Да, лжёт.

Решение. Предположим, что Миша говорит правду. Тогда 9 из 10 игроков команды правдолюбов забили по нечётному количеству голов (один, три или пять), а Миша — чётное. Но тогда команда правдолюбов суммарно должна была забить нечётное число голов, что противоречит тому, что она забила 20. Следовательно, наше предположение неверно и Миша лжёт.

4. (8–9) В семье Бесфамильных принято подсчитывать возраст семьи, т. е. сумму возрастов (число полных лет) папы, мамы и всех детей. Тридцать первого декабря Бесфамильные празднуют день рождения своей семьи. В год, когда родился младший ребёнок Даша, семье был 101 год. Через несколько лет Бесфамильные праздновали свое 150-летие. Сколько детей в семье Бесфамильных?

Ответ. Пять.

Решение. Пусть в семье Бесфамильных n детей. Тогда за один год возраст семьи увеличивается на $n + 2$ года: по году за каждого ребёнка и родителя. Если между 101-летием и 150-летием семьи Бесфамильных прошло k лет, то $k(n + 2) = 150 - 101 =$ $= 49$. Число 49 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только двумя способами: $7 \cdot 7$ и $1 \cdot 49$. В первом случае получаем $n = 5$, а во втором — или $n = -1$, или $n = 47$.

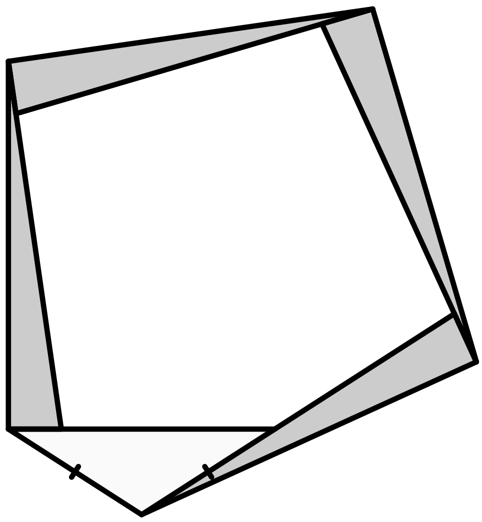
Второй случай можно отбросить по «естественным» причинам, а кроме того тогда

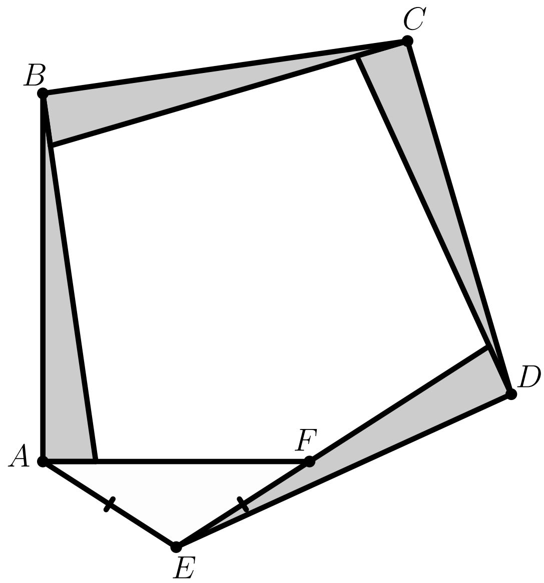
$k = 1$, но по условию прошло несколько лет.

5. (8–11) Лёша нарисовал геометрическую картинку, обведя четыре раза свой пластмассовый прямоугольный треугольник, прикладывая короткий катет к гипотенузе и совмещая вершину острого угла с вершиной прямого (см. рис.). Оказалось, что «замыкающий» пятый треугольник — равнобедренный (см. рис., равны именно отмеченные стороны). Какие углы у Лёшиного треугольника?

Ответ. $\frac{90}{11}^\circ$ и $\frac{900}{11}^\circ$.

Решение. Обозначим меньший из углов Лёшиного треугольника через α, а угол при основании равнобедренного треугольника — через β. Обозначим точки так, как показано на рисунке. Наше решение будет состоять из двух частей: в начале мы свяжем углы α и β, пользуясь суммой углов пятиугольника; после этого — пользуясь равенством треугольников ABC и CDE.





Итак, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 90^\circ + \alpha$, $\angle DEA = \alpha + 180^\circ - 2\beta$, $\angle EAB = \beta + 90^\circ$. Складывая все углы пятиугольника $ABCDE$, получаем, $3 \cdot (90^\circ + \alpha) + (\alpha + 180^\circ - 2\beta) + + (\beta + 90^\circ) = 540^\circ$, или $\beta = 4\alpha$.

Теперь заметим, что треугольники ABC и CDE — равные (по двум сторонам и углу между ними) и равнобедренные с углом при вершине $90^\circ + \alpha$. Следовательно, $AC = CE$ и $\angle BAC = \angle CED = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Значит, треугольник ACE равнобедренный и $\angle CAE = \angle CEA$. Т. е. углы $\angle CAE = \angle BAE - \angle BAC = (90^\circ + \beta) - (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ + \beta + \frac{\alpha}{2}$ и $\angle CEA = \angle DEA - \angle DEC = (180^\circ - 2\beta + \alpha) - (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 135^\circ - 2\beta + \frac{3\alpha}{2}$ равны, откуда $3\beta - \alpha = 90^\circ$.

Таким образом, $\beta = 4\alpha$ и $3\beta - \alpha = 90^\circ$, следовательно $11\alpha = 90^\circ$, $\alpha = \frac{90}{11}^\circ$.

6. (9–11) В классе 28 учеников. На уроке программирования они делятся на 3 группы. На уроке английского языка они тоже делятся на 3 группы, но по-другому. И на уроке физкультуры они делятся на 3 группы каким-то третьим способом. Докажите, что найдутся хотя бы два ученика, которые на всех трёх занятиях находятся друг с другом в одной группе.

Первое решение. Давайте пронумеруем группы на каждом из уроков: 1-я, 2-я, 3-я.

Для каждого ребёнка напишем последовательность из трёх чисел: номер его группы на уроках программирования, английского языка и физкультуры. Заметим, что всего существует ровно 27 различных последовательностей из трёх чисел, каждое из которых равно 1, 2 или 3. Поскольку детей в классе 28, то найдутся двое, последовательности которых совпадают. Но это и означает, что на всех трёх занятиях эти школьники находятся в одной группе.

Второе решение. Во время урока программирования 28 учеников разделены на три группы. Если в каждой группе не более 9 учеников, то всего учеников было бы не более 27; поэтому найдётся группа из хотя бы 10 учеников. Далее будем рассматривать только их. Во время урока английского эти хотя бы 10 учеников как-то распределены между тремя группами. Аналогично предыдущему рассуждению найдутся хотя бы четверо, попавшие в одну группу. Наконец, на уроке физкультуры эти хотя бы четверо не могут все находиться в разных группах, т.е. найдутся хотя бы двое, в третий раз попавшие в одну группу, что и требовалось доказать.

7. (10–11) На доске в ряд в некотором порядке выписаны несколько степеней двойки. Для каждой пары соседних чисел Петя записал в тетрадку степень, в которую нужно возвести левое число, чтобы получилось правое. Первым в ряду на доске шло число 2, а последним — число 1024. Вася утверждает, что этого достаточно, чтобы найти произведение всех чисел в тетрадке. Прав ли Вася?

Ответ. Да, прав.

Решение. Докажем, что произведение чисел в Петиной тетрадке равно 10. Пусть на доске написаны числа

$$2,\ 2^{a_1},\ 2^{a_2},\ \ldots,\ 2^{a_n},\ 2^{10}.$$

Тогда в Петиной тетрадке будут написаны числа

$$a_1,\ \frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \ldots,\ \frac{10}{a_n}.$$

Каждое из a_i встречается в этой последовательности один раз в числителе и один раз в знаменателе. Следовательно, они все сократятся, и останется 10.

Комментарий. На самом деле можно отказаться и от того, что каждое из выписанных чисел является степенью двойки, а оставить лишь условие, что все выписанные числа положительны и не равны единице. Пусть, например, на доске написаны числа $b_0 = 2$, b_1, b_2, $\ldots$, b_n, $b_{n+1} = 1024$, а в тетрадке — числа x_0, x_1, $\ldots$, x_n. Тогда $b_i^{x_i} = b_{i+1}$, откуда

$$b_0^{x_0x_1\ldots x_n} = \left(b_0^{x_0}\right)^{x_1x_2\ldots x_n} = b_1^{x_1x_2\ldots x_n} = \left(b_1^{x_1}\right)^{x_2x_3\ldots x_n} = \ldots = \left(b_{n-1}^{x_{n-1}}\right)^{x_n} = b_n^{x_n} = b_{n+1},$$

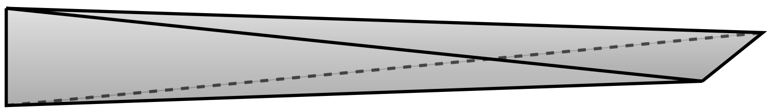
т.е. $2^{x_0x_1\ldots x_n} = 2^{10}$, откуда $x_0x_1\ldots x_n = 10$.

Наконец, можно воспользоваться знанием логарифмов и сказать, что $x_i = \log_{b_i} b_{i+1} = \dfrac{\ln b_{i+1}}{\ln b_i}$, откуда аналогично решению можно получить, что произведение $x_0x_1\ldots x_n$ равняется $\dfrac{\ln b_{n+1}}{\ln b_0} = \log_{b_0} b_{n+1}$. Последнее выражение зависит только от первого и последнего числа.

8. (11) Существует ли треугольная пирамида, среди шести рёбер которой:
а) два ребра по длине меньше 1 см, а остальные четыре — больше 1 км?
б) четыре ребра по длине меньше 1 см, а остальные два — больше 1 км?
(Задача не считается решённой, если решён только один пункт.)

Ответ. а) да; б) нет.

Решение. а) Возьмём два равнобедренных треугольника со сторонами 0,9 см, 1001 км, 1001 км. Расположим их друг на друге в одной плоскости, а дальше «приподнимем» один из них над плоскостью, не трогая его основание. Иными словами, повернём один из треугольников вокруг прямой, содержащей основания треугольников. Понятно, что можно это сделать так, чтобы расстояние между вершинами треугольников было меньше 1 см.



б) Предположим, что это возможно. В силу неравенства треугольника не может быть грани, где одна сторона больше 1 км, а две меньше 1 см. Возьмём какое-нибудь ребро длиной больше 1 км. Оно входит в две грани. Но хотя бы в одной из них нет второго ребра длиной больше 1 км, противоречие.

Вариант подготовили: А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, М. А. Евдокимов, Т. В. Казицына, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, И. В. Раскина, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль.