XXXIX Турнир имени М.В. Ломоносова 25.09.2016
Конкурс по физике. Критерии проверки

Задача 1. Если ночью включить в комнате свет, то в окне можно увидеть отражение лампочки. Это происходит потому, что даже те тела, которые кажутся нам прозрачными (как стекло), на самом деле всегда отражают часть света. Так происходит и с кристаллами сахара. Сахарные крупинки представляют из себя маленькие прозрачные кристаллики, каждый из которых отражает часть света. Чтобы мы смогли увидеть дно сахарницы, свет должен пройти через толщу сахара, отразиться от дна, снова пройти сквозь сахар обратно и попасть к нам в глаз.

Давайте грубо оценим, какая часть света дойдет до нашего глаза. Крупинка имеет ширину примерно 1 мм. Глубину сахарницы можно считать равной 10 см. Тогда примерное количество крупинок, через которые пройдет свет на пути до дна сахарницы, равно 100. Будем считать, что от поверхности отражается 5% света, тогда дальше проходит 95%. Поскольку, как мы выяснили, на пути у света встретится примерно 200 таких поверхностей (свет должен войти в каждую крупинку и выйти из нее), то до дна сахарницы дойдет лишь $0{,}95^{200} \approx 0{,}000035$ от упавшего света — несколько тысячных долей процента! А ведь свету надо еще пройти через сахар назад, он при этом еще во столько же раз ослабеет. Конечно, мы ничего и не видим. Точнее, видим тот свет, который был отражен поверхностями крупинок — он и сообщает сахарному песку белый цвет.

С леденцом же все проще. Там свет отражается только два раза — на «входе» и на «выходе». И до нас доходит $0{,}95^2 \approx 0{,}9$ того света, который попал на леденец. Поэтому через него так хорошо видно "на просвет".

Задача 2. Для начала добьемся ненулевых показаний весов, положив на них тарелку/блюдце/разделочную доску, куда затем будем насыпать перец.

Вес блюдца не меньше 30 грамм, поэтому мы точно попали в рабочий диапазон весов.

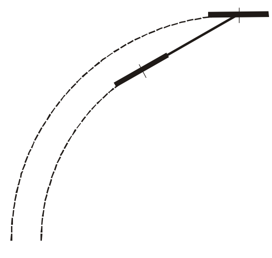
Начнем медленно насыпать перец на весы, пока их показания не изменятся (вырастут на 1 г). Затем будем медленно сыпать новую горку перца. Как только показания весов изменятся, мы можем быть уверены, что в этой горке 1 г перца — потому что мы добавили ровно такую массу, которая изменяет показания на 1 г.

Дальше задача сводится к делению 1 г перца на 10 равных частей. Простой способ, легко реализуемый в быту, заключается в формировании из этого грамма дорожки постоянной ширины и делении ее на 10 частей по длине (например, с помощью линейки).

Если считать, что дорожка дает большую погрешность, то можно воспользоваться соломинкой для коктейлей — ее сечение можно считать постоянным. Засыпем перец в заткнутую с одной стороны соломинку, при помощи линейки разделим получившийся столбик на 10 равных частей и высыпем из трубочки одну часть. (Реальной хозяйке, конечно, такая точность не нужна).

Этот способ, разумеется, не единственно возможный. Можно придумать много других.

Задача 3. На повороте велосипедист оставляет за собой два следа, причем след от заднего колеса проходит ближе к центру поворота, чем след от переднего. Переднее колесо велосипеда — рулевое, при повороте оно располагается под углом к плоскости рамы. Ось заднего колеса жестко прикреплена к раме, поэтому оно всегда находится в ее плоскости. Кроме того, при качении каждое колесо движется в направлении, задаваемом его плоскостью. Тогда в повороте колеса велосипеда могут располагаться только так, как показано на рисунке — заднее колесо ближе к центру поворота, чем переднее.



Это верно, разумеется, только если колеса катятся без скольжения по земле. При прохождении поворота «с заносом» расположение колес может быть совершенно другим.

Задача 4. Равновесие жидкости в сообщающихся сосудах наступает тогда, когда давления на разных концах соединяющей их трубки оказываются одинаковыми. Посмотрим, что произойдет с давлением у дна сосуда А, если трубку заткнули пробкой, не давая жидкости перетекать.

При нагревании масса жидкости не меняется, изменяются только ее плотность и объем. В случае а) объем $V = hS$, где S — площадь сечения сосуда, а h — высота уровня жидкости. Отсюда следует, что когда жидкость расширяется при нагревании, высота ее уровня изменяется во столько же раз, во сколько и объем. Так как $m = \rho V$ не меняется, то и давление у дна $p = \rho g h = \rho V g / S$ не меняется, так как S — постоянна.

В случае в) объем уже не равен hS, и когда жидкость расширяется, она попадает в более узкое место сосуда, поэтому если объем увеличился в некоторое количество раз, уровень изменяется в большее. Это легче себе представить, вообразив сосуд в форме пузыря, из которого вверх выходит тонкая трубка. Если изначально жидкостью был заполнен только пузырь, то, даже при очень небольшом увеличении объема (небольшом уменьшении плотности), уровень жидкости в сосуде вырастет очень сильно. Таким образом, в случае в) произведение ρh, а следовательно и давление, при расширении жидкости увеличивается. Аналогичным образом, в случае б) при расширении жидкости давление на дне сосуда А падает.

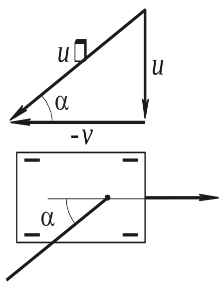
Если теперь вынуть пробку, то в случае а) жидкость не потечет, в случае б) уровень в сосуде Б понизится, а в случае в) — повысится. Если же никакой пробки не было, то направление перетекание будет тем же самым, просто оно будет происходить постепенно вместе с нагреванием.

Задача 5. Как известно, плотность соленой воды больше плотности пресной. Также, плотность холодной воды больше плотности теплой (при температурах выше 4ºС, а температуры ниже на глубине в километр не бывает).

После того, как насос заполнит трубу глубинной водой (холодной и малосоленой), температура в ее верхней части начнет увеличиваться — из-за теплообмена с теплой «внешней» водой через стенку трубки. Соленость же «внутренней» воды изменяться не будет — соль стенка не пропускает. В результате через некоторое время трубка окажется заполненной малосоленой и теплой (в верхней части) водой. Средняя плотность такой воды меньше, чем воды «внешней» — снаружи температура такая же, а соленость у поверхности больше. Поэтому вода в трубке создает меньшее давление, чем вода снаружи (при одинаковой высоте столба). Эта разность давлений начинает поднимать воду в трубе — на верхнем конце возникает фонтан. Этот фонтан будет бить непрерывно, если трубка достаточно тонкая и текущая по ней глубинная вода успевает прогреваться.

Работать такой фонтан будет до тех пор, пока вся вода в океане не перемешается и не приобретет одинаковую соленость и температуру. Для этого потребуется, разумеется, очень большое, но конечное время — если океан полностью изолирован от внешних воздействий. В реальном же океане перемешивания не произойдет даже за очень большое время — солнечное излучение будет поддерживать температуру и соленость верхних слоев. Поэтому в таком океане фонтан будет бить до тех пор, пока на Земле светит Солнце.

Задача 6. Пусть относительно земли буер движется со скоростью $\boldsymbol{v}$. Перейдем в систему отсчета, связанную с ним. В этой системе отсчета ветер набегает на него со скоростью, равной разности векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$:



$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$$

Заметим, что если ветер давит на парус «слева», то он продолжает разгонять буер, уменьшая угол между направлением движения буера и скоростью ветра. Отсюда следует, что в установившемся режиме ветер дует ровно вдоль паруса, т. е. под углом α к скорости буера. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$v = u\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Это и есть максимальная скорость буера.

Задача 7. Ракета и вылетающая из нее вода приобретают кинетическую энергию за счет работы, совершаемой расширяющимся воздухом. Оценим эту работу. Пусть V — внутренний объем ракеты. Воздух расширяется от объема $V/2$ до V. Его давление при этом зависит от объема довольно сложным образом, но для оценки будем считать, что к концу расширения оно уменьшается в два раза (как в изотермическом процессе), а при вычислении работы заменим неизвестную функцию $p(V)$ средним арифметическим ее начального и конечного значения:

$$p_{ср} = \frac{2p_0 + p_0}{2} = 1{,}5\,p_0$$

Здесь $p_0 \approx 10^5$ Па — атмосферное давление. Нужно еще учесть, что над выходящей из ракеты водой также совершает (отрицательную) работу атмосфера. Поэтому искомая работа

$$A \approx \Delta p \Delta V = \left(p_{ср} - p_0\right)\left(V - V/2\right) = \frac{1}{4} p_0 V = 12{,}5 \text{ Дж}$$

Эта энергия распределяется между ракетой и водой в пропорции, определяемой законом сохранения импульса. Если масса ракеты m, масса воды M, скорость ракеты сразу после старта v, скорость воды u, то по законам сохранения энергии и импульса имеем:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = A$$
$$mv - Mu = 0$$

Исключив из этих уравнений u, находим приобретенную ракетой кинетическую энергию:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{M}{m+M} A \approx 9 \text{ Дж}$$

При вычислении численного значения мы использовали, что $M = \rho_{воды} V/2 = 250$ г. Максимальная высота, на которую поднимется ракета, определяется с помощью закона сохранения энергии:

$$mgh = E$$
$$h = \frac{E}{mg} \approx 9 \text{ м}$$

Задача 8. а, б) Электровоз разгоняет сила трения покоя, возникающая между ведущими колесами и рельсами. Его ускорение прямо пропорционально этой силе, а она пропорциональна крутящему моменту электродвигателя. В описанной модели этот момент, в свою очередь, пропорционален потребляемому двигателем току. Значит, ускорение электровоза прямо пропорционально току через каждый двигатель.

Скорость электровоза при отсутствии проскальзывания прямо пропорциональна угловой скорости вращения колес, т.е. роторов двигателей. Этой же скорости, в свою очередь, пропорциональна противоЭДС. Значит, в этих условиях $\mathcal{E} = kv$ (k — постоянный коэффициент).

Когда контроллер при старте из положения покоя ставится в положение 1, на каждый двигатель подается напряжение $U/4$ (где U — напряжение контактной сети). ПротивоЭДС в этот момент равна нулю — двигатели еще не вращаются. Значит, начальная сила тока через них (определяющая ускорение в начале этапа 1) равна

$$I_1 = \frac{U}{4r}$$

По мере разгона электровоза растет скорость вращения роторов двигателей. ПротивоЭДС возрастает, а сила тока

$$I = \frac{U/4 - E}{r}$$

— уменьшается. Крутящий момент падает, но пока ток отличен от нуля — электровоз продолжает разгоняться. Наконец, через достаточно большое время скорость достигает значения, при котором противоЭДС сравнивается с поданным на двигатель напряжением: $\mathcal{E} = U/4$. Ток обращается в ноль, разгон электровоза прекращается. Таким образом, к концу этапа 1 устанавливается скорость

$$v = \frac{U}{4k}$$

Когда контроллер переводится в положение 2, на каждый из двигателей подается напряжение $U/2$. ПротивоЭДС в этот момент по-прежнему равна $U/4$ (скорость еще не успела измениться). Значит, сила тока через каждый двигатель в начале этапа 2

$$I_2 = \frac{U/2 - U/4}{r} = \frac{U}{4r} = I_1$$

Значит, ускорение в этот момент равно ускорению в начале этапа 1:

$$a_2 = a$$

Далее электровоз разгоняется, пока противоЭДС не достигнет величины $U/2$ — нового значения напряжения на двигателе. Это произойдет при скорости

$$v_2 = \frac{U}{2k} = 2v$$

К концу этапа 2 устанавливается скорость в два раза бóльшая чем в конце этапа 1.

Наконец, при переводе контроллера в положение 3 на каждый двигатель подается полное напряжение сети U. Сила тока через двигатель в этот момент

$$I_3 = \frac{U - U/2}{r} = \frac{U}{2r} = 2I_1$$

Поэтому ускорение в начале этапа 3

$$a_3 = 2a$$

Установившаяся скорость определяется условием $\mathcal{E} = U$, значит

$$v_3 = \frac{U}{k} = 4v$$

в) Реальный электровоз нельзя разгонять описанным выше упрощенным способом по следующей причине. Двигатели такого электровоза — очень мощные электрические машины, с очень маленьким сопротивлением обмотки r. Если подать на такой двигатель напряжение, значительно отличающееся от противоЭДС, потребляемый ток будет таким большим, что обмотка просто сгорит. Чтобы этого не произошло, напряжение питания должно в любой момент лишь немного превышать противоЭДС. Поэтому контроллер реального электровоза имеет очень много положений, большинство из которых — реостатные. В этих положениях последовательно с электродвигателями включаются мощные резисторы, принимающие на себя часть напряжения сети. При изменении скорости электровоза машинист переключениями контроллера изменяет величину этих резисторов, удерживая разность напряжения на двигателе и противоЭДС в безопасных пределах.

Задача 9. а) Давление в воде под поршнем, поднятым на высоту h, равно ($p_0 \approx 10^5$ Па — атмосферное давление)

$$p = p_0 - \rho g h$$

Для того, чтобы началось кипение, это давление должно сравняться с давлением насыщенных паров воды при данной температуре. Если $p_н$ пренебрежимо малó, искомая высота определяется условием $p_0 - \rho g h = 0$. Отсюда

$$h = \frac{p_0}{\rho g} \approx 10 \text{ м}$$

б) Высоту подъема жидкости в капилляре радиуса r можно найти, например, приравняв силу поверхностного натяжения, действующую по периметру мениска и силу тяжести поднятой жидкости:

$$2\pi r \sigma = \rho \pi r^2 h g$$

Отсюда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

Для нашего капилляра эта формула дает $h \approx 20$ м.

в) Вода поднимется на высоту 20 м, которая следует из капиллярной формулы. И кипеть не будет, хотя на самом верху давление в ней будет отрицательным! Дело в том, что условие «выживания» очень маленьких пузырьков насыщенного пара должно учитывать лапласов скачок давления на искривленной поверхности. Для того, чтобы такой пузырек не схлопнулся, давление в нем должно превышать сумму давления в окружающей жидкости и лапласова скачка на его поверхности:

$$p_{\text{н}} \geq p + \Delta p_{\text{л}} = p + \frac{2\sigma}{R}$$

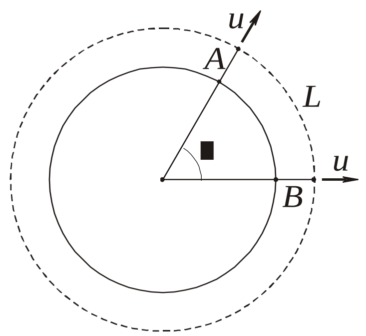
Здесь R — радиус пузырька. В обычных условиях всегда есть вероятность образования достаточно больших пузырьков, для которых второе слагаемое в этой формуле пренебрежимо мало́. Поэтому в условии кипения его и не учитывают. Но в капилляре не может образоваться пузырек, радиус которого больше радиуса капилляра! Значит, минимальный лапласов скачок в этих условиях равен $2\sigma/r$. Поскольку давление в воде на высоте h, определяемой капиллярной формулой, равно

$$p = p_0 - \rho g h = p_0 - \frac{2\sigma}{r}$$

условие кипения в этой ситуации имеет вид:

$$p_{\text{н}} \geq p + \frac{2\sigma}{r} = p_0$$

Вода в капилляре закипит только при 100ºC — как если бы она находилась в открытой кастрюльке!



Задача 10. а, б) Возьмем какие-нибудь две точки A и B во вселенной и окружность с центром в центре “сферической вселенной”, на которой они лежат. Что такая окружность существует и единственная — утверждение нетривиальное, и доказываться здесь не будет, но оно аналогично тому, что и на плоскости и в пространстве любые две точки соединяет одна и только одна прямая.

Расстояние между этими двумя точками — это длина соответствующей дуги $L = \varphi R$. Так как угол, под которым точки видны из центра окружности не меняется, то мгновенная скорость точек друг относительно друга равна

$$v = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \varphi \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{L}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t} \sim L$$

Закон Хаббла действительно выполняется.

В модели вселенной, расширяющейся с постоянной скоростью u, $R = ut$, $\Delta R/\Delta t = u$. Значит,

$$v = \frac{L}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{L}{ut}u = \frac{L}{t}$$

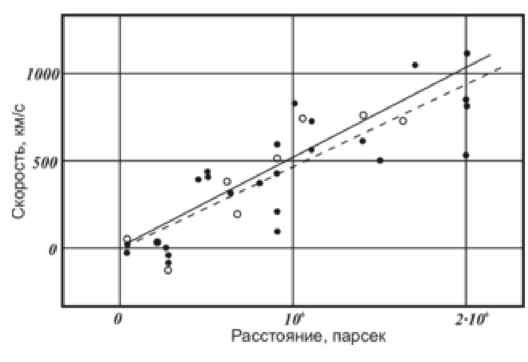
где t — возраст вселенной. Отсюда видно, что постоянная Хаббла равна $H = 1/t$ и уменьшается обратно пропорционально времени. А возраст вселенной

$$t = 1/H \approx 5 \cdot 10^{17}\ \text{с} \approx 1{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{лет}.$$

в) Будем считать, что с момента открытия закона Хаббла прошло $\Delta t \approx 100$ лет. Относительное изменение постоянной Хаббла за это время равно

$$\frac{\Delta H}{H} = t\left(\frac{1}{t+\Delta t} - \frac{1}{t}\right) \approx -\frac{\Delta t}{t} \sim 10^{-8}$$

То есть, чтобы заметить изменение постоянной Хаббла за это время, нужно измерять ее с точностью в одну миллионную процента.



В физике измерения очень редко удается провести с такой точностью. На самом деле, в настоящее время постоянная Хаббла измерена с точностью 2 процента, а в момент открытия точностью была настолько плохой, что могли возникнуть сомнения в самом законе $v = HL$ (см. график из оригинальной работы Хаббла 1929 года).