XXXVII Турнир имени М. В. Ломоносова 28 сентября 2014 года

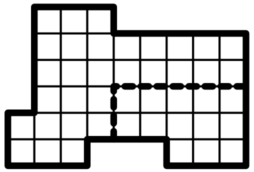
Конкурс по математическим играм.

Ответы и решения. Критерии проверки работ.

Выберите игру, которая вас больше заинтересовала, и попробуйте придумать для одного из игроков (первого или второго) стратегию, гарантирующую ему победу независимо от ходов соперника. Постарайтесь не только указать, как следует ходить, но и объяснить, почему при этом неизбежен выигрыш. Ответ без пояснений не учитывается.

Не пытайтесь решить все задания, сохраните время и силы для других конкурсов. Хороший анализ даже только одной игры позволит считать ваше участие в конкурсе успешным.

1. «Угловые разрезы». Из клетчатой бумаги вырезана по клеткам фигура. Первый игрок разрезает её на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков.



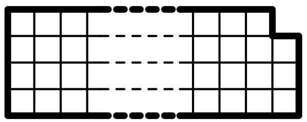
Второй игрок так же поступает с любой из двух получившихся фигур, потом первый — с одной из получившихся трёх и так далее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи, когда исходная фигура:

а) квадрат 3×3

б) квадрат 4×4

в) прямоугольник $4 \times N$ (N — любое натуральное число) с вырезанной угловой клеткой



г) прямоугольник 4×7

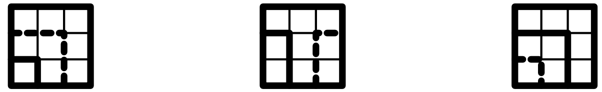
д) квадрат 5×5 с вырезанной угловой клеткой

е) квадратный равносторонний «уголок» толщиной в 4 клетки (то есть квадрат $(N+4) \times (N+4)$ с вырезанным угловым квадратом $N \times N$ для любого натурального числа N)

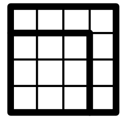
ж) прямоугольник 13×25

Решение. Заметим, что добавление к фигуре «выростов» толщины 1 не даёт новых возможностей сделать разрезы в соответствии с правилами игры. Поэтому такие «выросты» можно попросту игнорировать.

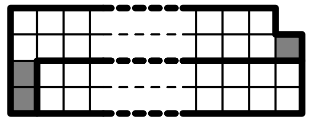
а) Победит второй игрок. Легко видеть, что у начинающего есть ровно три различных варианта хода (жирные линии) и на каждый из них второй игрок может ответить, закончив игру (пунктирные линии).



б) Победит начинающий. Первым ходом он вырежет квадрат 3×3. Оставшуюся часть резать нельзя, так как она шириной 1,   второй игрок, начав резать квадрат 3×3, проигрывает (см. пункт «а»).



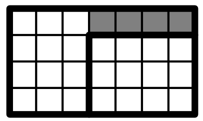
в) Победит начинающий. Первый ход он может сделать так, как показано на рисунке (жирная линия).



При этом фигура распадается на два равных белых прямоугольника, у одного из которых будут несущественные для игры серые «выросты».

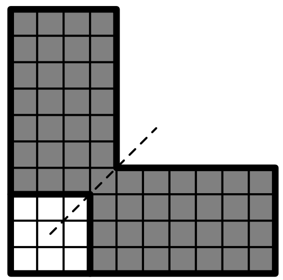
Теперь первый игрок применяет симметричную стратегию: на всякий ход второго в одном из прямоугольников отвечает таким же ходом в другом. Ходы раньше кончатся у второго игрока.

г) Победит начинающий, его первый ход на рисунке показан жирной линией. Далее стратегия аналогична стратегии из пункта «в».



д) Частный случай пункта «е».

е) Победит начинающий, его первый ход показан на рисунке (жирная линия).



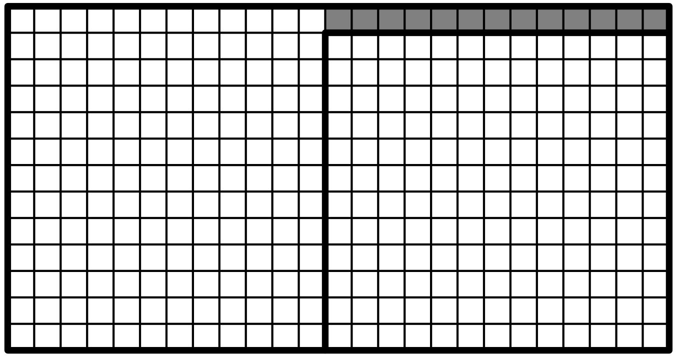
Пунктирная прямая делит закрашенную фигуру на две одинаковые части (и является осью симметрии фигуры). Разрез по правилам игры не может затронуть сразу обе эти части, и в любой одной части можно делать разрезы независимо от того, что происходит в другой.

На любые ходы второго игрока в закрашенной фигуре первый отвечает симметричным разрезом относительно пунктирной линии.

Когда второй игрок решит разрезать квадрат 3×3, первый тут же «дорежет» его как в пункте «а».

И снова ходы у второго закончатся раньше.

ж) Победит начинающий, вырезав прямоугольник 12×13. Стратегия аналогична стратегии в пункте «г».



Аналогичная игра возможна на любом прямоугольнике $m \times (2m-1)$ при любом натуральном $m > 1$.

Критерии проверки.

За высказанное вне пунктов (или при обсуждении пункта, в котором, кроме данного суждения, ничего ценного нет) соображение «выросты ширины 1 не влияют на дальнейших ход игры» — 3 балла. Один раз высказанное, такое суждение считается высказанным во всех пунктах, где оно требуется.

а) 3 балла. Достаточно трёх картинок, но чтобы было ясно, где чей ход.

б) 3 балла. (2 балла за первый ход и 1 балл за последующую ссылку на пункт «а»).

в) 10 баллов. Нужен первый ход, слова о несущественности «выроста» и упоминание симметрии. (Без рассуждения о «выросте» — 5 баллов.)

г) 5 баллов. Нужен первый ход, слова о несущественности «выроста» и упоминание симметрии. (Без рассуждения о «выросте» — 2 балла.)

д) 5 баллов. Нужен первый ход, упоминание передачи хода и упоминание симметрии. Возможно переборное решение для обрезка неквадратной формы. Решение «следует из пункта «е» » — 3 балла, если «е» решено, и 0 — если нет.

е) 7 баллов. Нужен первый ход, упоминание передачи хода и упоминание симметрии. Решение «так же как пункт «д» » засчитывается, если «д» решено верно (при этом именно симметрией, а не перебором) и без ссылки на «е».

ж) 6 баллов. Решение «так же как пункт «г» » засчитывается при наличии картинки с первым ходом (или словесного описания первого хода).

2. «Колода карт». В колоде две красные и много чёрных карт. Играют двое, которые всегда видят расположение карт в колоде.

В свой ход каждый вытягивает из колоды любую красную карту и помещает её в любое место колоды, но выше того места, где она была до этого. Если две красные карты лежат рядом, игроку разрешается вытянуть обе и поместить их в колоду как единое целое, также выше того места, где они лежали.

Победит тот, кто добьётся, чтобы обе красные карты лежали сверху колоды.

Известно, что верхняя из двух красных карт:

а) вторая сверху в колоде

б) третья сверху в колоде

в) четвёртая сверху в колоде

Кто — начинающий или его соперник — победит в зависимости от положения оставшейся красной карты?

г) Опишите все возможные расположения красных карт, при которых побеждает второй игрок.

Решение. Решим сразу общую задачу (пункт «г»).

Ответ: выигрышными для *второго* игрока будет заключительное положение, когда обе красные карты уже и так сверху колоды, а также выигрышными будут такие положения, при которых между красными картами одна чёрная, а над верхней красной картой — нечётное количество чёрных.

Эти положения назовём «плохими», а остальные (но не заключительное) — «хорошими».

Очевидно, что из плохого положения нельзя выиграть одним ходом. Также из него нельзя перейти в другое плохое положение: единственный шанс оставить между красными картами одну чёрную состоит в перенесении нижней красной на три позиции вверх, но при этом чёрных карт над верхней красной станет чётное число.

Напротив, из хорошей позиции одним ходом всегда можно или немедленно выиграть, или перейти к другой плохой позиции. В самом деле, если верхняя красная карта сверху, можно сразу выиграть. Если над верхней красной картой нечётное число чёрных, то можно нижнюю карту переместить так, чтобы между нею и верхней была одна чёрная (это нельзя сделать только, если красные карты рядом, но тогда можно мгновенно победить). Если же над верхней красной картой чётное положительное число чёрных, то можно нижнюю карту переместить в такую позицию над верхней, чтобы между нею и верхней была одна чёрная.

Теперь ясно, что начиная из хорошего положения, игрок либо сразу побеждает, либо создаёт плохое положение, соперник снова делает хорошее (ничего другого он сделать не может) и так далее. Поскольку соперник победить не может, победит начинающий.

А если начальное положение плохое, то игроки меняются ролями, и побеждает уже второй игрок.

Критерии проверки.

а) 3 балла.

б) 3 балла.

в) 5 баллов.

г) 20 баллов.

При этом голый верный ответ (если предыдущие пункты не решены) — 3 балла и 5 баллов — если решены (то же и за почти голый ответ при решённых «а», «б», «в», прикрытый рассуждениями про аналогичность). В полном решении должны быть тем или иным образом описаны выигрышные и проигрышные позиции, а также выигрышные ходы или их невозможность.

3. «Гостиница». Два администратора гостиницы играют друг с другом. В гостинице N одинаковых номеров. В начале игры в каждом номере живёт по одному человеку. За один ход администратор может всех жителей одного номера переселить в другой, а в освободившемся номере начать делать ремонт. При этом в номере не должно оказаться больше людей, чем мест. Администратор, который не может сделать ход, проигрывает.

Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) номера шестиместные, $N = 10$

б) номера трёхместные, $N = 15$

в) номера трёхместные, $N = 17$

г) номера трёхместные, N любое

д) номера четырёхместные, N любое

Решение.

а) Очевидно, после любого хода число номеров с жильцами уменьшается на один.

Когда останется два номера, игра окончится, потому что 10 человек нельзя заселить в один шестиместный номер.

Если есть по крайней мере три номера с жильцами, ход возможен. В самом деле, если в трёх номерах живет 10 человек, то в одном из этих номеров живёт не меньше 4 человек (если бы во всех трёх номерах жило бы не больше 3 человек, то всего было бы не больше 9 человек). Тогда в

остальных двух номерах вместе живёт не больше 6 человек, их и можно поселить в один номер.

Значит, игроки сделают по 4 хода, и в результате второй победит — независимо от того, как играл он сам и как — его соперник.

б) Победит второй игрок, придерживаясь правила: как только первый создал номер с двумя жильцами, доселить в этот номер третьего. Таким образом, после парного хода два номера уйдут на ремонт, а ещё один будет заполнен и тоже не будет принимать участия в игре. То есть, число номеров уменьшится на 3, и снова ходит первый игрок. После $\frac{N}{3}$ парных ходов игра окончится победой второго игрока. Эта стратегия годится для любого N, кратного трём, в том числе и для $N = 15$. Заметим, что если N даёт при делении на 3 остаток 1, то эта стратегия также работает — в конце останется один незаполненный номер, с которым ничего нельзя будет сделать.

в) А вот если $N = 17$ (и вообще, N даёт остаток 2 при делении на 3), описанная выше стратегия не работает. И неудивительно — при таких N побеждает первый игрок. Он сначала делает номер с двумя жильцами. Если второй дополняет его до трёх, первый начинает игру как бы с $(N-3)$ номерами. Если второй делает ещё один номер с двумя жильцами, первый дополняет его до трёх и ситуация на в гостинице точно такая же, как если бы, играя с $(N-3)$ номерами, первый сделал свой первый ход. Итак, N свелось к $(N-3)$, а $(N-3)$, в свою очередь, к $(N-6)$ и так далее, пока не останется 2 номера. Тогда первый и сделает свой победный ход.

г) Решение уже изложено в предыдущих пунктах. Первый победит, если N даёт остаток 2 при делении на 3, иначе победит второй.

д) Легко разобрать случаи $N = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ и установить, что при $N = 1$ и $N = 3$ побеждает второй, а при $N = 2$ и $N = 4$ — первый. Можно подумать, что исход игры зависит от чётности, но, проверив $N = 5$, убеждаемся, что побеждает снова первый!

Докажем теперь такое утверждение: «При $N > 4$ каждый игрок может свести игру к игре с $(N-4)$ номерами, в которой начинает игру второй игрок». Здесь «каждый» понимается в том смысле, что это может сделать первый игрок, а если ему это невыгодно, то это может сделать второй.

Итак, пусть у нас N номеров, в каждом один жилец. После хода первого будет

$$2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-2}$$

После хода второго получится одна из следующих двух ситуаций:

$$3, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-3} \qquad 2, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-4}$$

Обе эти ситуации первый может свести к

$$4, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-4},$$

то есть, по сути, к $(N-4)$, где начинает второй игрок — если ему, первому, это выгодно. Если же нет, то первый может в любом случае получить

$$3, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-5},$$

$$(\text{а из } \ 2, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-4} \ \text{— ещё вдобавок } \ 2, 2, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-6} \ )$$

Но второй игрок из обеих этих ситуаций может сделать

$$4, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-6}.$$

что равносильно

$$2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-6}.$$

Теперь ход первого игрока, но это всё равно, что номеров $(N-4)$ и ход второго, просто его первый ход уже как бы сделан.

В доказательстве использовалось, что $N \geqslant 6$, что законно, так как случаи $N \leqslant 5$ разобраны.

Итак, при N номерах каждый игрок может сделать так, чтобы второй начинал игру на $(N-4)$ номерах. Если уже известно, что на $(N-4)$ выигрывает первый, то эта манипуляция выгодна второму, он её применит и победит. А если на $(N-4)$ выигрывает второй, то эта манипуляция выгодна первому, тогда он её применит и победит. То есть, ответы на вопрос, кто победит при таком-то N, будут чередоваться через 4.

Описать ответ несложно, используя остатки при делении на 8: если число N при делении на 8 даёт остатки 2, 3, 4 или 7, победит первый, а в остальных случаях — второй.

Критерии проверки.

а) 6 баллов. Решение только из слов «всегда останется два номера» не засчитывается. Любая стратегия засчитывается (вопрос о её справедливости не стоит, ибо все стратегии верны; но изложение должно быть чётким, надо проверять, что второй игрок всегда сможет ходить *именно по стратегии*).

б) 3 балла.
При наличии текста «и так для делящихся на 3» + ещё 1 балл (в счёт оценки за пункт «г»).
При наличии текста «и так даже для делящихся на 3 с остатком 1» + ещё 1 балл (в счёт оценки за пункт «г»).

в) 4 балла.
При наличии текста «и так для делящихся на 3 с остатком 2» + ещё 1 балл (в счёт оценки за пункт «г»).

г) Данный пункт следует из пунктов «б» и «в».
Данный пункт оценивается исходя из 10 баллов.

При этом, если за пункты «б» и «в» уже выставлены какие-то баллы, то пункт «г» оценивается исходя из стольких баллов, сколько не хватает до 10 в сумме за «б» и «в». А если сумма за «б» и «в» 10 или больше, то за «г» баллов вообще не даётся. (Тем самым исключается ситуация, когда за одно и то же баллы ставятся 2 раза.)

д) 15 баллов. Голый ответ — 3 балла. Никакое количество разобранных конкретных примеров не учитывается. Соображения типа «надо стараться заселять номера полностью» не учитываются. Чёткая стратегия без доказательства — 7 баллов (плюс 3 балла за ответ, если он есть), если жюри может её доказать (и 0 баллов — если не может).

Общие принципы выставления баллов.

1) За каждую задачу присуждается целое число баллов от 0 до 20.

2) Баллы за различные пункты каждой задачи суммируются. Если сумма баллов за пункты превышает 20, то за задачу выставляется 20 баллов, иначе — сумма.

3) На работе красными чернилами ставится и обводится кружком $+N$ в том месте текста, которое добавляет к оценке N баллов. (Аналогичная отметка ставится в электронной системе проверки.)

4) Голый ответ — 0 баллов (за исключением пунктов «2г» и «3д»).

5) Примеры партий — 0 баллов.

6) Неверное понимание условия с последующим решением на основании понятого таким образом условия — 0 баллов.

7) Итоговый результат участника — сумма баллов по всем задачам.