Конкурс по математическим играм. Ответы и решения.

Выберите игру, которая вас больше заинтересовала, и попробуйте придумать для одного из игроков (первого или второго) стратегию, гарантирующую ему победу независимо от ходов соперника. Постарайтесь не только указать, как следует ходить, но и объяснить, почему при этом неизбежен выигрыш. Ответ без пояснений не учитывается.

Не пытайтесь решить все задания, сохраните время и силы для других конкурсов. Хороший анализ даже только одной игры позволит считать ваше участие в конкурсе успешным.

1. «Только один сосед». На прямоугольной доске $m \times n$ клеточек два игрока по очереди закрашивают по клеточке. Первой можно закрасить любую клетку, а далее каждая следующая закрашиваемая клетка должна иметь ровно одну общую сторону с уже закрашенной клеточкой. Дважды клеточку красить нельзя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) n и m — нечётные числа;

б) $n = m$;

в) $n = 2$, m — любое.

Решение.

а) Первый игрок побеждает, закрашивая центральную клетку и далее отвечая центрально-симметрично на ходы партнёра.

б) Первый игрок побеждает, закрашивая любую клетку на диагонали и далее отвечая на ходы партнёра симметрично относительно этой диагонали. При этом соперник не может закрасить клетку на этой диагонали, ибо у каждой клетки на этой диагонали после хода первого игрока всегда чётное число закрашенных соседей.

в) Второй игрок побеждает при $m = 1$ и при $m = 4k$, а иначе побеждает первый.

Приведём требуемые стратегии. Полоску будем располагать горизонтально, столбцы нумеровать слева направо числами $1, 2, 3, \ldots$

Если $m = 4k + 2$ или $4k + 3$, первый красит угловую слева клетку. Далее он играет по принципу: «Если есть возможность дозакрасить целиком нечётный столбец, это нужно делать, если нет — можно ходить куда попало». При этом в итоге все нечётные столбцы будут закрашены полностью, а чётные — наполовину. Всего нечётных столбцов будет $2k + 1$, в них закрашено по одной клетке. В чётных столбцах закрашено по две клетки. То есть всего будет закрашено нечётное количество клеток. Значит, последний ход сделал первый игрок — он и победил.

Если $m = 4k + 1$ и $k > 0$, первый красит клетку во втором слева столбце. Далее он играет по принципу: «Если есть возможность дозакрасить целиком чётный столбец, это нужно делать, если нет — можно ходить куда попало». При этом в итоге будут закрашены чётные столбцы, а нечётные — наполовину. Нетрудно подсчитать, что первый снова победит (так как количество нечётных столбцов будет $2k + 1$, то есть нечётным).

При $k = 0$, очевидно, победит второй. (А приведённая стратегия не работает — второго слева столбца попросту нет, и уже первый ход в соответствии с ней сделать нельзя.)

Наконец, при $m = 4k$ победит второй. Если первый закрасил какую-то клетку, второй дозакрашивает столбец и начинает играть по принципу: «Если есть возможность закрасить целиком столбец той чётности, которая была у первого закрашенного столбца, это нужно делать, если нет — можно ходить куда попало». При этом в итоге будут закрашены столбцы одной чётности, а остальные — наполовину. Количество чётных столбцов чётно и количество нечётных столбцов — тоже чётно. Поэтому всего будет закрашено чётное количество клеток. Значит, последний ход сделает второй игрок — он и победит.

2. «Колы и двойки». Две учительницы математики по очереди пишут в журнале подряд слева направо оценки — единицы или двойки. Если в какой-то момент несколько написанных в конце цифр составили число, которое делится на N без остатка, учительница, сделавшая такой ход, проигрывает. Кто из учительниц — начинающая или её соперница — победит в этой игре, как бы ни играла партнёрша?

Разберите случаи:

а) $N = 7$;

б) $N = 9$;

в) $N = 11$;

г) $N = 13$.

Решение.

а) При $N = 7$ победит первая. Она пишет 2, далее единицы писать никто не может ($21 = 7 \cdot 3$), а когда первая напишет 22222, у второй не будет хода, ибо 222222 кратно 7.

б) При $N = 9$ победит первая. Она пишет 2, а потом на любой ход второй дописывает 1. Получается либо 221, либо 211. Далее на любой ход второй первая дописывает другую цифру. Получается либо 2213, либо 2113 (цифра «3» условно заменяет последовательности «21» или «12»). Теперь ход второй однозначен, получаем 22132, либо 21131, а потом первая дописывает двойку и побеждает, потому что больше ходов нет (последовательности 221322 и 211312 не продолжаются).

в) При $N = 11$ победит первая. Она пишет 2, вторая может только 21, первая тогда 212, чем и выигрывает.

г) При $N = 13$ победит первая. Она пишет 1. После 1 нельзя писать 2, иначе последует 122, а тогда ничего больше не напишешь, ибо $1222 = 13 \cdot 94$, а $221 = 13 \cdot 17$. Так что пишем единицы, пока первая не напишет 11111 и победит, ибо $111111 = 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 37$. Это рассуждение, правда, не сработало бы, если бы числа 11122 или 1111122 делились на 13; но легко проверить, что это не так.

3. «Шашки по кругу». Доска для игры состоит из чётного числа полей, расположенных по кругу. В начале игры на нескольких соседних полях стоят белые шашки, а на противоположных им полях — чёрные. При этом на доске есть и свободные поля.

Игроки по очереди делают ходы шашками своего цвета, начинают белые. За ход можно либо передвинуть шашку на соседнее пустое поле, либо «бить» — перепрыгнуть через шашку соперника на следующее за ней пустое поле (перепрыгивать можно одним ходом последовательно несколько раз). Перепрыгнутые шашки снимаются с доски. Если есть возможность бить, то бить обязательно. (Если данным ходом можно побить (снять) несколько шашек соперника — то обязательно бить все эти шашки.)

Цель игры — снять с доски все шашки соперника.

Если оба соперника сделали большое число ходов (допустим, в тысячу раз превышающее число полей доски), а игра не кончилась, объявляется ничья.

Каков будет результат игры — победа белых, победа чёрных или ничья — при наилучшей игре обоих партнёров?

Рассмотрите случаи:

а) На доске 8 полей, у игроков по три шашки.

б) На доске 10 полей, у игроков по две шашки.

в) На доске $2N$ полей, у игроков по две шашки.

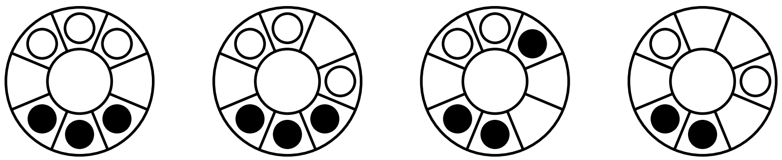
г) На доске $2N$ полей ($N > 4$), у игроков по три шашки. Докажите, что в этом случае чёрные могут гарантировать себе как минимум ничью.

д) На доске 12 полей, у игроков по пять шашек. Докажите, что и в этом случае чёрные могут гарантировать себе как минимум ничью.

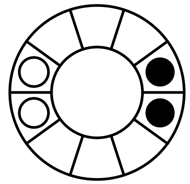
е) На доске $4N$ полей ($N > 2$), у игроков по три шашки. Докажите, что в этом случае не только чёрные (см. пункт «г»), но и белые могут гарантировать себе как минимум ничью (то есть, игра при правильной игре обоих закончится вничью).

Решение.

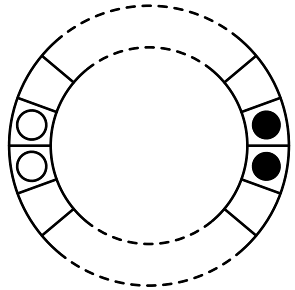
а) Первым ходом белые подставляют шашку под бой, следует размен, далее после любого возможного хода чёрных белые сразу же побеждают.



б) Это частный случай пункта «в».



в) Понятно, что если кто-то ставит шашку под бой, он проигрывает. Если в результате у игрока не осталось ни одной шашки — он проиграл сразу. Если осталась одна шашка — соперник может «окружить» своими двумя шашками, при этом он всегда может придвинуть свою шашку ближе к той клетке, откуда только что была убрана одиночная шашка соперника, и тем самым не подставить свою шашку под бой. Поскольку количество клеток, доступных одиночной шашке, с каждым ходом сокращается, рано или поздно она попадёт под бой одной из двух шашек соперника.

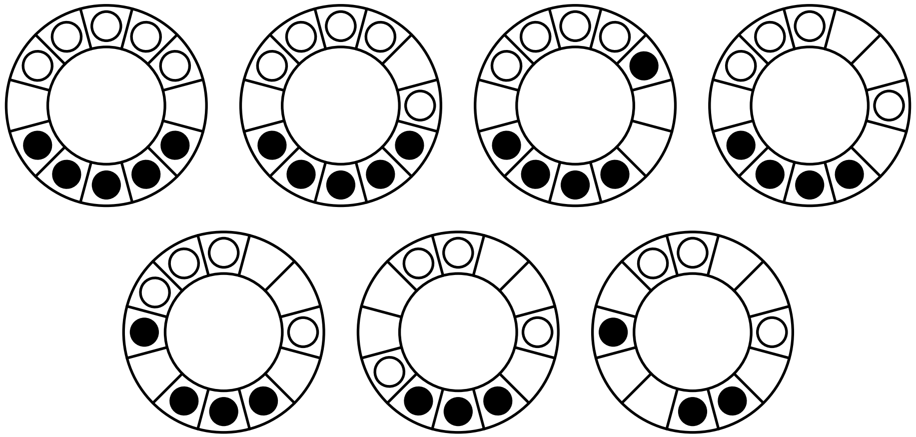


Ход, в результате которого не происходит снятия шашек с доски, назовём *простым*.

До начала игры суммарное число полей между соседними разноцветными шашками чётно (это все свободные поля доски). После простого хода белых оно становится нечётным (но большим 1), а после ответного хода чёрных снова чётным. Тем самым, у чёрных всегда есть ход. При этом чёрные левой шашкой ходят только влево, а правой — только вправо, отчего расстояние между чёрными шашками увеличивается, что невозможно делать бесконечно, а поэтому игра вскоре окончится их победой: одна из белых шашек попадёт под бой, чёрные её съедят и далее выиграют двумя шашками против одной.

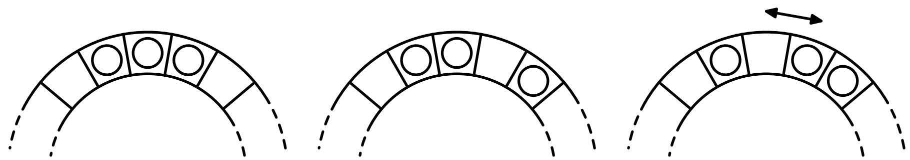
г) Изначально позиция игроков симметрична: против каждой белой шашки стоит чёрная. Допустим, в ответ на каждый простой ход белых (разрушающий симметрию) чёрные делают симметричный ход (он тоже будет простым и восстановит симметрию). Так может продолжаться до тех пор, пока белые не поставят шашку под бой. Но если не произойдёт размена, белые, очевидно, проиграют: даже если у них останется две шашки (а у чёрных три), чёрные, ходя средней шашкой, подгонят ситуацию к описанной в пункте «в» (когда суммарное число полей между соседними разноцветными шашками чётно) и победят. Поставить же шашку под бой и вынудить к размену белые могут только если их три шашки стоят рядом. Но в этот момент шашки чёрных симметричны им, и поставить белую шашку под бой невозможно.

д) Чёрные ведут игру следующим образом, однозначно определяя ходы белых (то есть все ходы белых являются вынужденными):



Теперь ход белых, а чёрные шашки стоят симметрично белым относительно центра игрового поля. Чёрные могут применять симметричную стратегию. В решении пункта «в» описано, почему в данном случае симметричная стратегия гарантирует ничью.

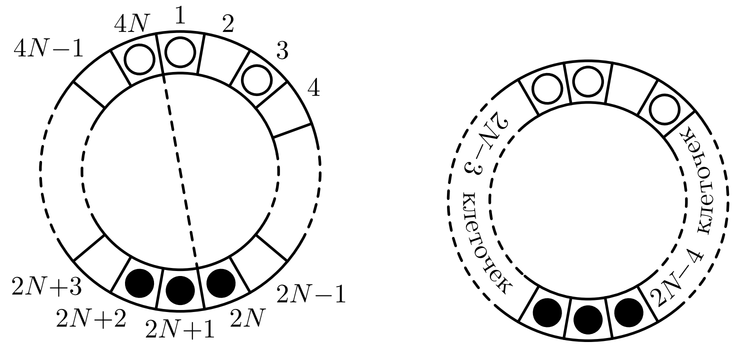
е) Приведём ничейную стратегию за белых. Она состоит в следующем: сначала белые делают ход одной из своих шашек. Затем они, если не возникает необходимости бить, ходят только средней шашкой (передвигая её «туда-сюда» между крайними шашками).



При этом, очевидно, игра будет продолжаться сколь угодно долго, пока чёрные не подставят свою шашку под бой белых. Ясно, что если при этом не произойдёт размена, то белые будут иметь численное преимущество и легко победят[1]. Размен возможен только если все три чёрные шашки перед ходом, требующим от белых взятия, будут стоять подряд, через одно пустое поле от белой шашки.

[1] Численное преимущество может быть реализовано следующим образом. Белые могут играть тремя своими шашками против двух или одной шашек чёрных в соответствии со стратегией, описанной в решении пункта «в». При этом крайние белые шашки реализуют стратегию, а ход средней белой шашки можно использовать для корректировки чётности ходов в случае, если это необходимо для реализации стратегии.

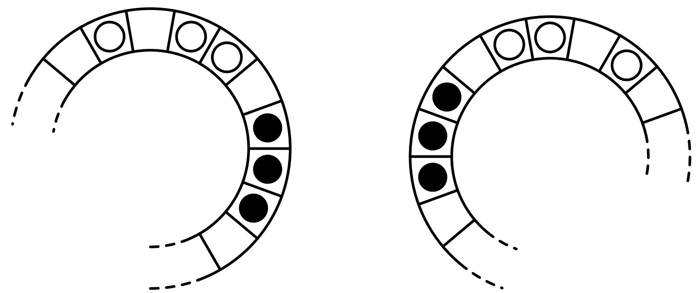
Рассмотрим, как такая ситуация может возникнуть. После первого хода белых (допустим, правой шашкой), чёрные шашки от белых справа отделяет $2N-4$, а слева $2N-3$ пустых поля. Это понятно из рисунка (пунктирная линия делит игровое поле точно пополам, в каждой половине находится $2N$ клеточек).



Если через какое-то количество ходов чёрные шашки «строем» подошли к белым справа, то каждая чёрная шашка сделала по $2N-5$ ходов вправо (а кроме того, какие-то шашки, возможно, двигались также и влево, но эти ходы компенсировались дополнительными ходами вправо в таком же количестве). То есть, чёрные сделали $3(2N-5)+2K$ ходов. Это число нечётно. Центральная белая шашка также сделала нечётное число ходов и встала ближе к той белой шашке, которая делала первый ход.

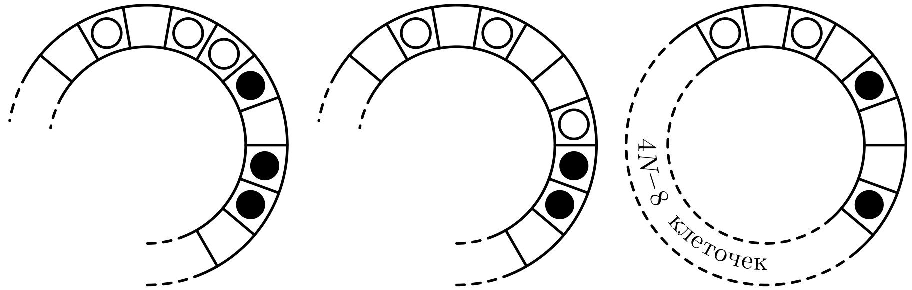
Если же чёрные шашки подошли к белым слева, то каждая чёрная шашка сделала по $2N-4$ ходов влево (а кроме того, какие-то шашки, возможно, двигались также и вправо, но эти ходы компенсировались таким же количеством дополнительных ходов влево). То есть, чёрные сделали $3(2N-4)+2K$ ходов. Это число чётно. Центральная белая шашка также сделала чётное число ходов и встала дальше от той шашки, которая делала первый ход.

Первая из описанных ситуаций показана на рисунке слева, вторая — на рисунке справа.



Видим, что обе ситуации одинаковые (зеркально симметричны друг другу), поэтому достаточно для одной из них, скажем, для первой, разобрать, что будет, если чёрные подставят шашку под бой.

Произойдёт размен, после которого возникнет ситуация, показанная на рисунке.



Между белыми и чёрными шашками будет с одной стороны $4N-8$ пустых полей[2], а с другой стороны — одно пустое поле. То есть общее количество пустых полей, разделяющих шашки разных цветов, будет нечётным. Ситуация стала аналогичной рассмотренной в пункте «в».

Теперь белые ходят как в пункте «в» — так, чтобы расстояние между их шашками постоянно росло. После хода белых суммарное расстояние станет чётным, после ответного хода чёрных — нечётным, и так далее. Поскольку больше никому из игроков ставить шашку под бой нельзя, это расстояние не может быть меньше двух, а поэтому перед ходом белых — не меньше трёх, и у белых всегда будет безопасный ход. А так как расстояние между белыми шашками будет постоянно расти, ходы рано или поздно кончатся — и кончатся они у чёрных.

Итак, размен чёрным невыгоден, и при разумной игре чёрных партия закончится вничью.

[2]Так как по условию всего $4N$ полей, а на картинке нарисовано 8 из них.