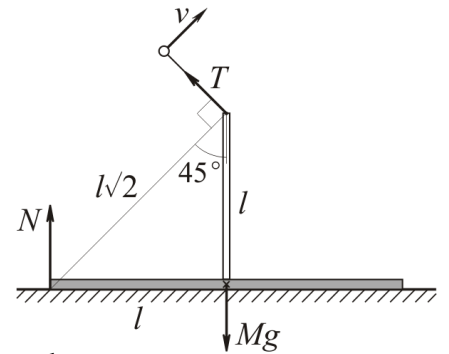


**Задача 1.**

(а)  
 В условии сказано, что  $v \gg \sqrt{gl}$ . Это означает, что кинетическая энергия шарика  $mv^2/2$  много больше максимального изменения его потенциальной энергии при движении по окружности  $mgl$ . В таком случае можно пренебречь изменением скорости шарика при подъеме вверх и опускании вниз и считать, что шарик движется вокруг точки подвеса с постоянной скоростью  $v$ . Его центростремительное ускорение тогда постоянно по модулю и равно  $a_c = 2v^2/l$ . Мы видим, что величина  $ma_c = 2mv^2/l$  для нашего шарика много больше действующей на него силы тяжести  $mg$  (в силу условия  $v \gg \sqrt{gl}$ ). Поэтому во II законе Ньютона для шарика силой тяжести можно пренебречь и считать, что на него действует только сила натяжения стержня. Эта сила натяжения тогда равна  $T = ma_c = 2mv^2/l$ , при движении шарика ее модуль не меняется.



Найдем максимальную массу нашей подставки, при которой она еще покачивается (или минимальную, при которой не покачивается). В моменты качания сила реакции опоры со стороны стола приложена только в одной точке — на краю подставки, а значит, она обладает нулевым моментом относительно этой точки. Чтобы найти максимальную массу подставки  $M$ , найдем моменты силы тяжести и силы натяжения стержня относительно этой точки. Момент силы тяжести равен  $Mgl$  (подставка однородна, ее центр тяжести находится посередине). Момент силы натяжения  $T$  меняется при движении шарика. Если масса подставки максимальна, момент этой силы сравнивается с моментом силы тяжести только когда достигает максимума (вес подставки оказывается перенесен на ее край только в этот момент времени). Максимальный момент силы натяжения будет достигнут при наибольшей длине ее плеча, т.к. мы уже показали, что модуль этой силы остается постоянным. Максимальная длина плеча не может превышать расстояние от края подставки до точки подвеса, равное  $l\sqrt{2}$ . Заметим, что такая длина плеча достигается, когда стержень находится под углом  $45^\circ$  к горизонтали.

Равенство моментов

$$\frac{2mv^2}{l} \cdot l\sqrt{2} = Mgl$$

определяет значение максимальной массы подставки. Покачиваний не будет при

$$M > \frac{2\sqrt{2}mv^2}{gl}.$$

(b)  
 Пусть  $\phi$  — угол отклонения стержня от вертикали,  $v_0$  — начальная скорость шарика. Найдем зависимость  $v(\phi)$  в предположении отсутствия качаний. Если стержень отклонился на угол  $\phi$ , то шарик приобрел потенциальную энергию относительно нижней точки, равную  $mg(l/2)(1 - \cos \phi)$ . Запишем закон сохранения энергии:

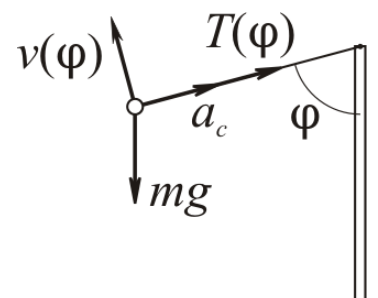
$$\frac{2mv_0^2}{2} = \frac{2mv(\phi)^2}{2} + mg\frac{l}{2}(1 - \cos \phi)$$

Отсюда

$$v(\phi) = \sqrt{v_0^2 - gl(1 - \cos \phi)}.$$

На шарик действуют сила натяжения стержня  $T(\phi)$  и сила тяжести  $mg$ . Записав II закон Ньютона в проекциях на направление стержня

$$m \frac{2v(\phi)^2}{l} = T(\phi) - mg \cos \phi,$$



получаем из него величину силы натяжения:

$$T(\phi) = m\left(\frac{2v(\phi)^2}{l} + g \cos \phi\right) = m\left(\frac{2v_0^2}{l} + g(3 \cos \phi - 2)\right)$$

Такая же сила будет приложена к верхней точке стержня. Чтобы найти момент этой силы относительно края подставки, нужно вычислить длину ее плеча. Она равна расстоянию от края подставки до линии действия силы  $T$ :

$$d = l\sqrt{2} \sin(\phi - \pi/4)$$

Значит, момент  $P$  силы натяжения равен

$$P(\phi) = Td = ml\sqrt{2}\left(\frac{2v_0^2}{l} + g(3 \cos \phi - 2)\right) \sin(\phi - \pi/4).$$

Нам известно, что покачивание началось при некоторой начальной скорости и угле  $\phi = \pi/2$ . Это означает, что при этом угле было достигнуто максимальное значение момента силы  $T$ , и это максимальное значение оказалось равно моменту силы тяжести. Условие максимума функции  $P(\phi)$  — равенство нулю ее производной  $dP(\phi)/d\phi$ . Запишем это условие:

$$\frac{dP(x)}{d\phi} = -ml\sqrt{2} \cdot 3 \sin(\phi - \pi/4) + ml\sqrt{2}\left(\frac{2v_0^2}{l} + g(3 \cos \phi - 2)\right) \cos \phi - \pi/4$$

$$\left.\frac{dP(x)}{d\phi}\right|_{\phi=\pi/2} = -ml\sqrt{2}g \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + ml\sqrt{2}\left(\frac{2v_0^2}{l} - 2g\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = m(2v_0^2 - 5gl) = 0.$$

Отсюда получаем

$$v_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$$

Значение  $P(\phi)$  в максимуме (с учетом найденной величины  $v_0$ ):

$$P(\pi/2) = ml\sqrt{2}\left(\frac{2v_0^2}{l} - 2g\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3mgl$$

Приравняв это значение моменту силы тяжести, получаем массу подставки:

$$3mgl = Mgl$$

$$M = 3m$$

## Задача 2.

### Газ Ван-дер-Ваальса.

(а)

При расширении в вакуум газ не совершает работы. Если к тому же можно пренебречь теплообменом газа с окружающими телами, то по I началу термодинамики получаем, что внутренняя энергия газа в этом процессе не меняется —  $U_1 = U_2$ , то есть

$$\frac{3}{2}RT_1 - \frac{a}{V_1} = \frac{3}{2}RT_2 - \frac{a}{V_2}$$

Отсюда получаем:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2a}{3R}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) \approx -10,7K$$

Эта величина отрицательна (так как  $V_2 > V_1$ ), то есть газ при расширении остывает. Поскольку  $V_2 = 100V_1$ , слагаемое  $1/V_2$  можно было вообще не учитывать — ошибка составила бы всего 1%.

(b)

Теперь рассмотрим 2 моля аргона. Пусть они занимают объем  $V$  при температуре  $T$ . Чему равна их внутренняя энергия? Рассмотрим один из этих молей. Он занимает объем  $V/2$ , его температура  $T$ . Значит, его внутренняя энергия

$$U\mu = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{V/2} = \frac{3}{2}RT - \frac{2a}{V}$$

Теперь нужно учесть, что этих молей два. Их общая внутренняя энергия

$$U = 2U\mu = 3RT - \frac{4a}{V}.$$

Как показывает это рассуждение, первое слагаемое во внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса при заданной  $T$  прямо пропорционально количеству вещества — как и у идеального газа. А вот второе — пропорционально *квадрату* количества молей (при заданном  $V$ ). Этот факт связан с тем, что второе слагаемое — потенциальная энергия взаимодействия молекул. При увеличении плотности газа Ван-дер-Ваальса в том же объеме энергия каждой молекулы увеличивается пропорционально этой плотности, потому что уменьшается среднее расстояние между молекулами. А кроме этого — возрастает количество самих молекул. Отсюда и возникает квадратичная зависимость.

Далее аналогично пункту (a) получаем:

$$3RT_1 - \frac{4a}{V_1} = 3RT'_2 - \frac{4a}{V_2}$$

$$\Delta T' = T'_2 - T_1 = \frac{4a}{3R} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \approx -21,4\text{K}$$

Два моля аргона остынут в данных условиях вдвое сильнее, чем один.

### Задача 3.

(a)

Как видно из первого рисунка, «заряд-изображение» для плоской поверхности находится на том же расстоянии от поверхности, что и электрон, только с другой стороны (под поверхностью) и противоположен по знаку. Значит, сила притяжения электрона к изображению, то есть зарядам, которые его поле индуцирует на поверхности, на расстоянии  $x$  от этой поверхности равна

$$F = k \frac{e^2}{4x^2} \quad \left( k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right).$$

Потенциальную энергию можно найти, проинтегрировав эту силу по координате с учетом того, что на бесконечности  $W = A_B$  :

$$W(x) = A_B + \int_{\infty}^x F(x') dx' = A_B + \int_{\infty}^x \frac{ke^2}{4x^2} dx' = A_B - \frac{ke^2}{4x}.$$

Другой способ получить эту формулу. Известно, что потенциальная энергия двух точечных зарядов  $e$  и  $-e$ , расположенных так, как электрон и его изображение, равна  $-ke^2/2x$ . Эта энергия — работа сил взаимодействия зарядов при их перемещении из текущего положения на бесконечность. Но в нашем случае «заряд-изображение» виртуален — работа при перемещении совершается только над электроном. Отсюда возникает отличие в два раза. Если еще учесть, что на бесконечности  $W(x)$  равна  $A_B$ , а не нулю, то получим искомую формулу.

(b)

Потенциальная энергия электрона в однородном электрическом поле равна  $W_1 = -eEx$ , значит, его полная потенциальная энергия над поверхностью металла с приложенным полем

$$W(x) = A_B - \frac{ke^2}{4x^2} - eEx.$$

Заметим, что эта функция обладает максимумом (см. рисунок). В этом случае электрону, находящемуся в металле, для удаления на бесконечность достаточно сообщить энергию, равную значению  $W$  в максимуме — после этой точки на него везде действует отталкивающая от поверхности сила.

Точку этого максимума можно найти, продифференцировав функцию  $W(x)$  и приравняв производную  $dW/dx$  к нулю. Можно также заметить, что в этой точке полная действующая на электрон сила обращается в ноль — сила со стороны приложенного поля становится равна силе притяжения к «заряду-изображению»:

$$Ee = \frac{ke^2}{4x_m^2}.$$

Отсюда находим:

$$x_m = \sqrt{\frac{ke}{4E}}, \quad W(x_m) = A_B - \frac{ke^2}{4x_m} - eEx_m = A_B - \sqrt{ke^3E}.$$

Таким образом, работа выхода, то есть энергия, необходимая для удаления электрона на бесконечность, уменьшилась на

$$\Delta A_B = A_B - W(x_m) = \sqrt{ke^3E}.$$

Это явление — уменьшение работы выхода при приложении электрического поля — называется **эффектом Шоттки**.

(с)  
Энергия в электронвольтах — это энергия в Джоулях, деленная на численное значение заряда электрона  $e$ . Для  $E = 10^4$  В/см, подставив численные значения, получаем:

$$\frac{\Delta A_B}{e} = \sqrt{keE} \approx 0,038 \text{ эВ}$$

Такая величина мала по сравнению с характерной работой выхода в несколько электронвольт, так что в большинстве случаев ее можно не учитывать. Найдем также

$$x_m = \sqrt{\frac{ke}{4E}} \approx 19 \times 10^{-9} \text{ м}$$

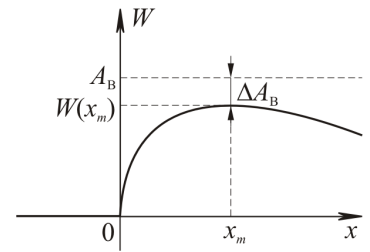
Явления, связанные с устройством поверхности и силами, действующими на электрон при ее пересечении, могут происходить только на расстояниях от поверхности, сравнимых с межатомными ( $\sim 0,1$  нм). С уверенностью можно утверждать, что на расстоянии в 20 нм (на два порядка больше) никакого взаимодействия электрона с поверхностью, кроме электростатического, быть не может, поэтому описанная выше модель в таком поле работает.

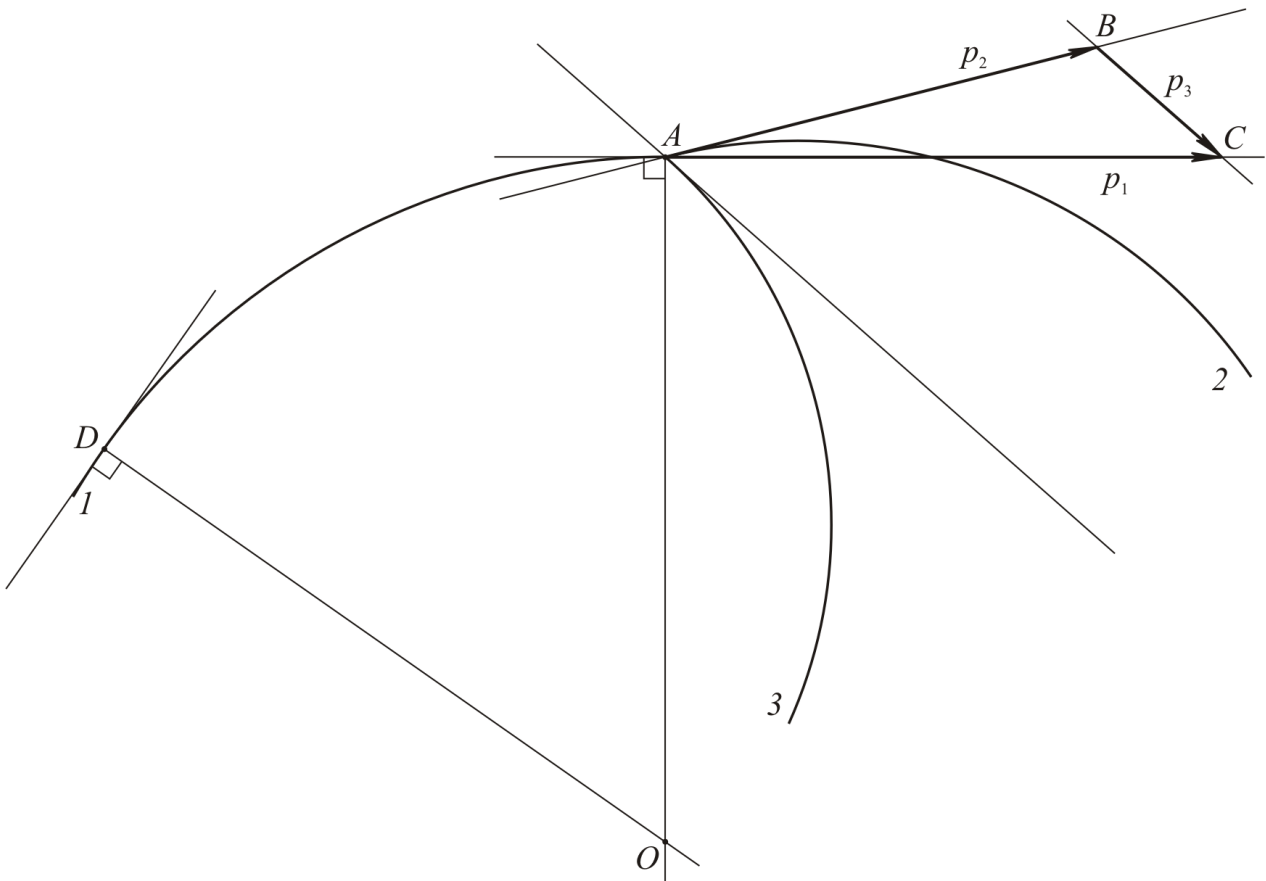
#### Задача 4.

При столкновении частиц выполняется закон сохранения импульса:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$$

Здесь  $\mathbf{p}_1$  — импульс  $\alpha$ -частицы перед столкновением,  $\mathbf{p}_2$  — ее импульс после столкновения,  $\mathbf{p}_3$  — импульс отскочившей частицы X. Построим по трекам частиц этот векторный треугольник. Для этого проведем по линейке касательные ко все трем трекам в точке A. После этого с помощью циркуля и линейки построим прямую, параллельную касательной к треку 3 и пересекающую две другие касательные на некотором расстоянии от точки A (см. рисунок).





Поскольку импульсы частиц направлены по касательным к их траекториям, получившийся треугольник  $ABC$  подобен с некоторым коэффициентом треугольнику импульсов. Сами импульсы из него найти нельзя, поскольку неизвестен коэффициент подобия, но можно определить их отношения. Измерив линейкой отрезки  $AB$  и  $AC$ , находим:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{AB}{AC} \approx 0,8$$

Это отношение можно также найти, измерив радиусы кривизны соответствующих треков и вычислив их отношение. Поскольку кинетическая энергия частицы  $E = \frac{p^2}{2m}$ , отношение энергий  $\alpha$ -частицы до и после столкновения

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \approx 0,64$$

Тогда по закону сохранения энергии (столкновение упругое) энергия, которую приобретает частица  $X$  равна

$$E_3 = E_1 - E_2 = \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) E_1 \approx 0,36E_1 = 18\text{МэВ}$$

Для определения массы частицы  $X$  найдем из рисунка отношение импульсов  $p_3$  и  $p_1$ :

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{BC}{AC} \approx 0,3$$

Поскольку  $E_1 = \frac{p_1^2}{2m_\alpha}$  и  $E_3 = \frac{p_3^2}{2m_X}$ , то отношение масс

$$\frac{m_X}{m_\alpha} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^2 \cdot \frac{E_1}{E_3} \approx \frac{0,3^2}{0,36} = 0,25$$

Масса  $\alpha$ -частицы близка к 4 массам протона  $m_p$ . Поэтому масса частицы  $X$

$$m_X \approx 0,25m_\alpha \approx m_p$$

Измерим теперь радиусы треков 1 и 3 — они понадобятся для определения заряда частицы  $X$ . Для этого проведем касательные к треку 1 в двух разных точках (например,  $A$  и  $D$ ), с помощью циркуля и линейки восстановим к ним перпендикуляры в точках касания (см. рисунок). Точка пересечения этих перпендикуляров — центр кривизны трека, а расстояние — его радиус  $r_1$ . Измерение дает  $r_1 \approx 80$  мм. Прделавав аналогичное построение для трека 3, находим  $r_3 \approx 50$  мм. Как известно, радиус окружности, по которой движется в магнитном поле  $B$  частица с зарядом  $q$ , массой  $m$  и скоростью  $v$ , равен

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

Поэтому отношение зарядов частицы  $X$  и  $\alpha$ -частицы равно

$$\frac{q_X}{q_\alpha} = \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{R_1}{R_3} = \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{r_1}{r_3} = 0,3 \cdot \frac{80}{50} = 0,48$$

Заряд  $\alpha$ -частицы равен  $2e$ , где  $e$  — заряд протона (элементарный заряд). Поэтому, если верить нашим измерениям,  $q_X = 0,96e$ . Но заряд, в отличие от массы, — дискретная величина. Заряд любой частицы может быть равен только целому числу элементарных зарядов (кварки, обладающие дробным электрическим зарядом, не могут наблюдаться в свободном состоянии). Возможно, конечно, что мы сделали великое научное открытие — обнаружили частицу с дробным зарядом. Но гораздо вероятнее, что дело просто в погрешности наших построений и измерений. С большой уверенностью можно утверждать, что  $q_X = e$ . Итак, масса частицы  $X$  очень близка к массе протона, ее заряд равен заряду протона. Из известных науке частиц это может быть только протон.

### Задача 5.

(a)  
 Данный распад происходит с сохранением энергии и импульса. При этом импульс распадающейся частицы  $p_0$  равен (по графику) примерно  $2,7 \text{ \AA}^{-1}$ , а импульс каждого из ротонов  $p$  — около  $1,9 \text{ \AA}^{-1}$  (положение минимума на графике). Так как импульсы ротонов одинаковы по величине, они разлетаются под равными углами к направлению импульса исходной квазичастицы. Тогда по закону сохранения импульса  $p_0 = 2p \cos(\phi/2)$ , где  $\phi$  — угол между импульсами ротонов. Отсюда

$$\phi = 2 \arccos(p_0/2p) \approx 90^\circ$$

. Ротоны разлетаются под углом, близким к прямому.

(b)  
 Явление, состоящее в исчезновении силы сопротивления (вязкого трения) при движении тела в жидкости (или жидкости по трубе) называется **сверхтекучестью**. Это явление может быть объяснено с помощью изложенной в тексте модели квазичастиц. Тонкий момент такого объяснения — тот факт, что движущееся в гелии тело может рождать только квазичастицы, понижающие полную энергию в системе отсчета, связанной с этим телом, а приведенный график с энергиями и импульсами квазичастиц относится к системе отсчета, в которой гелий покоится. Но квазичастица — объект условный, ее импульс и энергия — всего лишь сумма импульсов и энергий всех атомов гелия. Пользуясь этим, можно переводить импульсы и энергии квазичастиц из одной системы отсчета в другую. Пусть тело движется со скоростью  $v$  относительно гелия и порождает квазичастицу. Тогда импульс этой квазичастицы в системе отсчета тела  $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$ , где  $\mathbf{p}_i$  — импульс  $i$ -го атома в этой системе отсчета, сумма берется по всем атомам. Аналогично, в системе отсчета, связанной с гелием, импульс квазичастицы  $\mathbf{p}_0 = \sum_i \mathbf{p}_{i0}$ , где  $\mathbf{p}_{i0}$  — импульс  $i$ -го атома в системе отсчета гелия. Если  $m$  — масса каждого атома (они все одинаковые), то

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i0} - m\mathbf{v}$$

по известному правилу сложения скоростей при переходе в другую систему отсчета. Тогда энергия гелия (сумма кинетических энергий его атомов) в системе отсчета тела равна

$$E = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} = \sum_i \frac{(p_{i0} - mv)^2}{2m} = \sum_i \frac{p_{i0}^2}{2m} - v \sum_i p_{i0} + \sum_i \frac{mv^2}{2} = \epsilon - vp_0 + \frac{Mv^2}{2}$$

Первая сумма в получившейся формуле — полная кинетическая энергия атомов в системе отсчета гелия. Она равна энергии родившейся квазичастицы  $\epsilon$ . Сумма во втором слагаемом — импульс квазичастицы  $p_0$ . Третье слагаемое — полная кинетическая энергия невозбужденного гелия ( $M$  — его масса) в системе отсчета тела. Итак, мы видим, что рождение квазичастицы по-разному изменяет энергию гелия в двух этих системах отсчета. В системе гелия его энергия вначале равна нулю, квазичастица делает ее равной  $\epsilon$  — в этой системе отсчета энергия обязательно возрастает. В системе же тела энергия вначале  $Mv^2/2$  (гелий в этой системе отсчета движется и обладает кинетической энергией независимо от наличия или отсутствия квазичастиц). А рождение квазичастицы изменяет ее на величину  $\epsilon - vp_0$ .

Теперь вспомним, что в своей системе отсчета тело не может передать гелию энергию (потому что покоящееся тело не может совершить работу). Отсюда следует, что в этой ситуации возможно лишь такое рождение квазичастиц, которое понижает полную энергию гелия в этой системе отсчета. То есть должно быть выполнено условие  $vp_0 > \epsilon$ .

Нас интересует случай, когда это условие не может быть выполнено ни для одной квазичастицы, то есть для всех точек спектра  $vp_0 < \epsilon$ . Поскольку скалярное произведение двух векторов заданной длины максимально, когда эти вектора сонаправлены, достаточно потребовать выполнения этого неравенства для квазичастиц, излучаемых в направлении движения тела (вектор  $p_0$  сонаправлен вектору  $v$ ). Для всех таких квазичастиц должно выполняться условие

$$\frac{\epsilon}{p_0} > v$$

Отсюда понятен смысл **критерия сверхтекучести Ландау**. Этот критерий гласит: жидкость может находиться в сверхтекучем состоянии, если для энергетического спектра её элементарных возбуждений  $\epsilon(p)$  минимальное значение отношения энергии квазичастицы к её импульсу  $\epsilon(p)/p$  больше нуля.

Для спектра, приведенного в тексте, этот критерий, очевидно, выполнен. В самом деле — отношение  $\epsilon/p$  равно тангенсу угла между осью абсцисс и лучом, проведенным из начала координат в точку графика. Вычислив этот тангенс для луча, касающегося графика (см. рисунок), получим минимальное значение, которое может принимать величина  $\epsilon/p$ . Или — максимальное значение скорости тела, при которой оно движется в жидком гелии без силы сопротивления. Измерение по графику и вычисление дают

$$v_{max} \approx 60 \text{ м/с}$$

Эксперименты показывают, что эта оценка максимальной скорости оказывается завышенной примерно на порядок (по сравнению с наблюдаемой), что объясняют существованием в жидком гелии других типов элементарных возбуждений.

