Задача 1.

(5 баллов)

Когда шарик висит в таком положении, его высота h определяется длиной нитки, которую он может поднять.

Запишем условие равновесия шарика:

$$\rho_в gV = \rho_г gV + mg + \lambda gh$$

Здесь $\rho_в$ и $\rho_г$ — плотности воздуха и гелия соответственно, m — масса резиновой оболочки шарика, λ — линейная плотность нитки. Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$(m_в - m_г)g = mg + \lambda gh$$

где $m_г$ — масса гелия в шарике, а $m_в$ — масса воздуха, вытесненного шариком. Если пренебречь дополнительным давлением, которое создает упругость оболочки и объемом самой оболочки, то количество вещества в шарике равно количеству вещества, вытесненного им, так как молярный объем газа зависит лишь от давления и температуры (не зависит от типа газа). Если это количество вещества обозначить через ν, то $m_в = \nu M_в$, $m_г = \nu M_г$ ($M_в$ и $M_г$ — молярные массы воздуха и гелия), и условие равновесия приобретает вид

$$(M_в - M_г)\nu g = mg + \lambda gh.$$

Так как шарик движется очень медленно, то это условие выполняется в каждый момент времени. Если $\Delta\nu$ — количество гелия, вышедшего из шарика за 10 часов, а Δh — изменение его высоты за это время, то

$$(M_в - M_г)(\nu - \Delta\nu)g = mg + \lambda g(h - \Delta h).$$

Отсюда, учитывая предыдущее уравнение, получаем:

$$\Delta\nu = \frac{\lambda\Delta h}{M_в - M_г} = 0,002 \text{ моль}.$$

За 10 часов из шарика вышло $\nu N_A = 0,2 \times 6 \times 10^{23} = 1,2 \times 10^{23}$ молекул гелия. Значит, за 1 с через 1 см^2 оболочки проходит $1,2 \times 10^{23}/(10 \times 60 \times 60 \times 1000) \approx 3,3 \times 10^{13}$ молекул.

Задача 2.

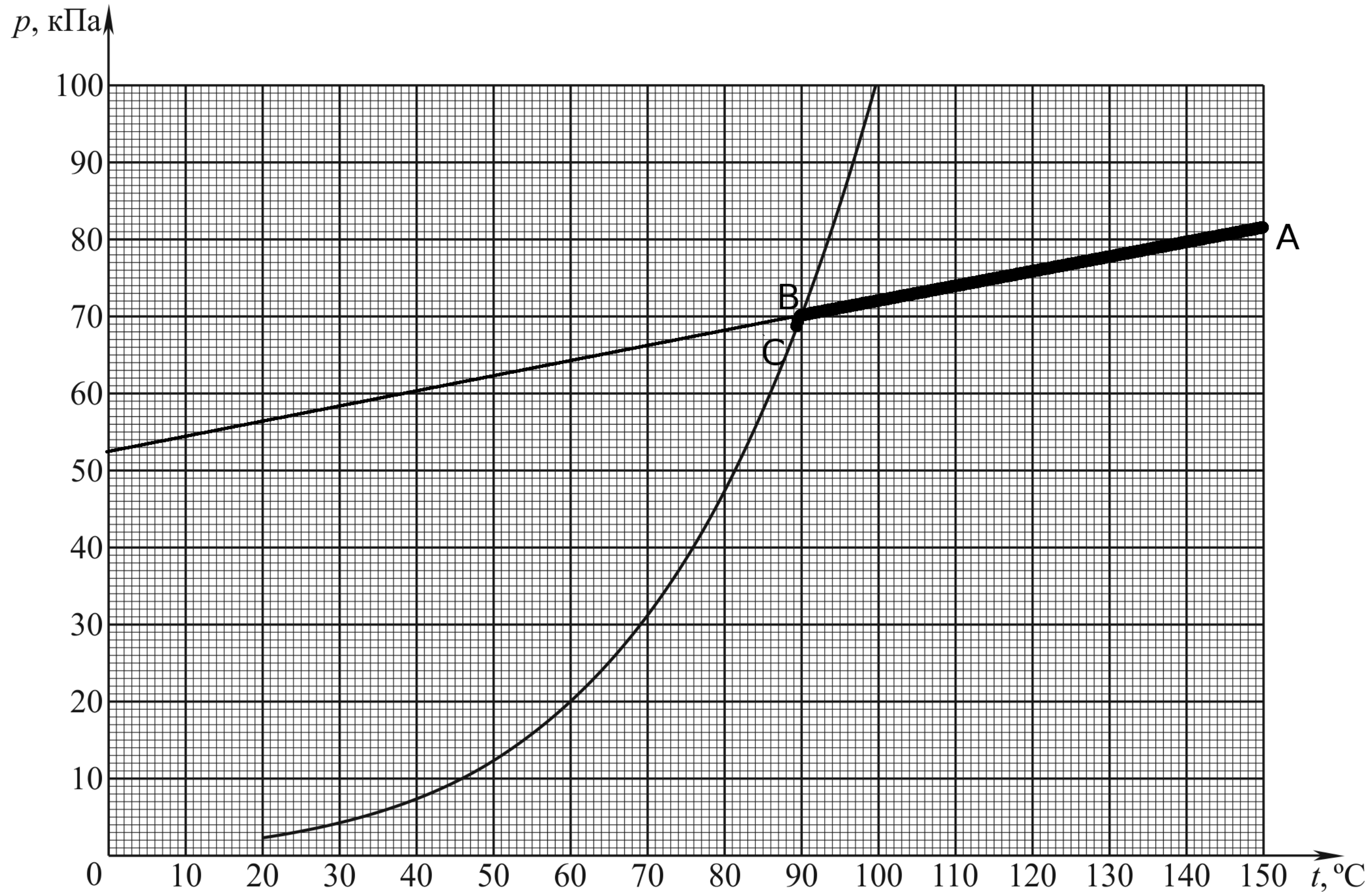
(12 баллов)

а) Найдем полное количество воды, содержащееся в сосуде. Применив к начальному состоянию (когда вся вода газообразна) уравнение Менделеева-Клапейрона, получаем:

$$\nu = \frac{\rho_0 V}{RT_0} = \frac{81,5 \text{ кПа} \times 0,01 \text{ м}^3}{8,31 \text{ Дж/(моль} \times K) \times 423K} \approx 0,232 \text{ моль}.$$

Масса этой воды $m = M_в \nu \approx 18$ г/моль $\times\, 0,232$ моль $\approx 4,18$ г.

Будем считать водяной пар идеальным газом. Процесс его охлаждения в данных условиях состоит из двух частей. На первом этапе пар изохорически (сосуд герметичный) остывает, пока его давление не сравняется с давлением насыщенного пара (никакой конденсации при этом не происходит). После этого начинается конденсация с одновременным охлаждением оставшегося пара и сконденсировавшейся воды. Давление в системе при этом в любой момент равно давлению насыщенного пара. Найдем точку на графике $p_н(t)$, в которой закончится изохорическое охлаждение (точка B). До этого момента по закону Шарля $p/T = const$, то есть графиком процесса в координатах (t, p) является прямая. Чтобы построить эту прямую, отметим на координатной плоскости две ее достаточно удаленные друг от друга точки. Это будут начальная точка A с координатами $(150°C, 81,5$ кПа$)$ и, например, точка с координатами $(0°C, p_{273})$, где $p_{273} = 81,5$ кПа $\times\, 273K/423K \approx 52,6$ кПа — давление газа при температуре $0°C$, найденное по закону Шарля.



Соединив эти точки прямой, мы видим, что конденсация пара начнется при температуре $90°C$ и давлении $p = 70$ кПа. Разумеется, участок этой прямой левее точки B не имеет физического смысла. Он нужен нам только для того, чтобы наиболее точно найти пересечение прямой и кривой на графике.

Конечную точку всего процесса назовем точкой C.

Найдем количество тепла, отводимое от системы на участке AB. Поскольку работа газа равна нулю, по первому началу термодинамики

$$Q_{AB} = -\Delta U = -3\nu R\Delta T = 3 \times 0,232 \text{ моль} \times 8,31 \text{ Дж/(моль} \times K)\times$$
$$\times\,(423K - 363K) \approx 347 \text{ Дж}$$

Здесь мы учли, что водяной пар — многоатомный газ.

Как видим, на участке BC у системы забирают $Q_{BC} = Q - Q_{AB} = 1000 - 347 = 653$ Дж. Это тепло распределяется между тремя процессами: выделением теплоты парообразования, охлаждением пара и охлаждением сконденсировавшейся воды. Для приближенного расчета будем считать, что выделением тепла, связанным с двумя последними процессами, можно пренебречь. Тогда всю теплоту Q_{BC} выделяет пар в процессе конденсации, что позволяет найти массу сконденсировавшейся воды:

$$\Delta m = Q_{BC}/L = 653 \text{ Дж}/2290 \text{ кДж/кг} \approx 0,29 \text{ г}.$$

б) Оценим теперь величину ошибки, к которой приводит наше приближение. Для этого найдем изменение температуры ΔT на участке BC, считая его заведомо малым. Изменение давления пара на этом участке, связанное с уменьшением его массы,

$$\Delta p = \frac{\Delta m}{m} p = \frac{0,29 \text{ г}}{4,18 \text{ г}} \times 70 \text{ кПа} \approx 5 \text{ кПа}.$$

При вычислении этой величины мы пренебрегли объемом сконденсировавшейся воды и изменением температуры ΔT — тогда давление пара прямо пропорционально его массе. С другой стороны, поскольку пар на этом этапе является насыщенным, ΔT теперь можно оценить с помощью графика $p_{\text{н}}(t)$. Легко убедиться, что на этом графике изменению давления $\Delta p \approx 5$ кПа в окрестности точки B соответствует изменение температуры $\Delta T \approx 2K$. Как видим, оно действительно мало по сравнению с абсолютной температурой системы.

Найдем теперь, какое количество тепла ΔQ выделяют при этом остывании пар и жидкая вода. Оценку сверху для этой величины можно получить, если не учитывать изменения масс каждой их этих фаз и считать, что на участке BC остывают пар массы m и вода массы Δm:

$$\Delta Q \approx c\Delta m\Delta T + 3\nu R\Delta T \approx 2,4 \text{ Дж} + 11,4 \text{ Дж} \approx 14 \text{ Дж}.$$

Как видим, это тепло составляет всего лишь $\approx 2\%$ от всей теплоты $Q_{BC} = 653$ Дж, что действительно сравнимо с погрешностью определения величин по графику. Таким образом, с этой точностью (2%) можно считать массу сконденсировавшейся воды равной $\Delta m \approx 0,29$ г.

Задача 3.
(10 баллов)

Если в переходном процессе в электрической цепи заряд конденсатора должен измениться, то время, за которое он изменится, будет тем больше, чем большее сопротивление этот заряд встречает на своем пути. Действительно — чтобы заряд изменился быстро, нужно, чтобы он протек по цепи за маленькое время, то есть, чтобы в ней появился большой ток, который как раз и ограничивает сопротивление. А если сопротивление очень мало, то ток может быть очень большим, и перезарядка происходит практически мгновенно.

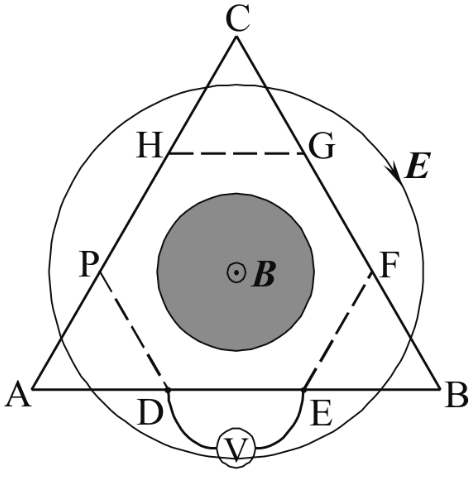
Рассмотрим нашу цепь. При замыкании ключа перезарядка в контуре, состоящем из двух конденсаторов, произойдет гораздо быстрее всех процессов, затрагивающих батарею, так как сопротивление проводов много меньше R. Значит, можно считать, что сразу после замыкания батарея вообще никак не участвует в происходящем, а электрический заряд перетекает от заряженного конденсатора к незаряженному, пока напряжения на них на не сравняются. Этот процесс сопровождается выделением тепла, однако выделяется оно не в резисторе R, а в соединительных проводах.

Вначале первый конденсатор был заряжен до напряжения $U_0 = \mathcal{E}$, при этом его заряд был $q_0 = C\mathcal{E}$. Сразу после замыкания ключа эквивалентная емкость двух соединенных конденсаторов станет равна $2C$, при этом их суммарный заряд останется тем же (приток заряда через R происходит медленно, им можно пренебречь). Значит, на двух конденсаторах установится напряжение $U_1 = q_0/2C = \mathcal{E}/2$, а их суммарная энергия будет $W_1 = 2CU_1^2/2 = C\mathcal{E}^2/4$.

После этого начнется медленная дозарядка конденсаторов от батареи. Именно на этом этапе тепло будет выделяться в резисторе R. Перетекание зарядов прекратится, когда батарея зарядит оба конденсатора до напряжения $\mathcal{E}$. Их суммарная энергия при этом станет равна $W_2 = 2C\mathcal{E}^2/2 = C\mathcal{E}^2$. При этом через батарею протечет заряд $\Delta q = 2C\mathcal{E} - C\mathcal{E} = C\mathcal{E}$, над которым она совершит работу $A = \Delta q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$.

В резисторе в этом процессе выделится тепло $Q = W_1 - W_2 + A = C\mathcal{E}^2/4$.

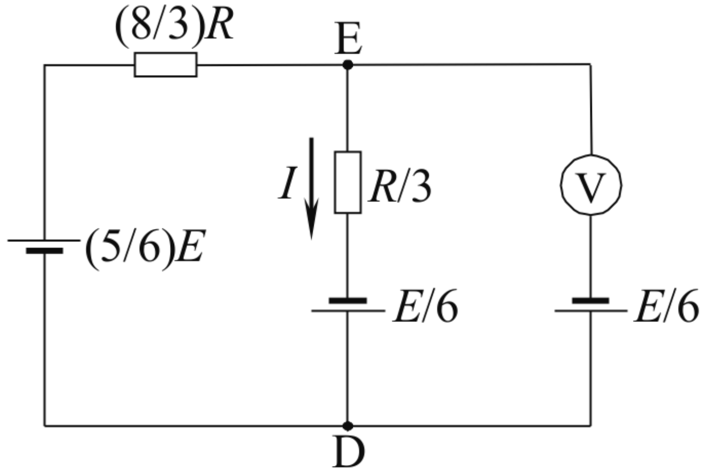
Задача 4.
(15 баллов)



Отрезок DE, очевидно, является стороной правильного шестиугольника $DEFGHP$, центр которого лежит на оси соленоида. Вихревое электрическое поле цилиндрического соленоида обладает аксиальной симметрией. Значит, его работа (ЭДС индукции) одинакова на каждой из сторон этого шестиугольника. Поскольку полная ЭДС в шестиугольнике равна $\mathcal{E}$, на отрезке DE действует ЭДС индукции $(1/6)\mathcal{E}$. Однако, будет ошибкой считать, что именно такое напряжение и покажет вольтметр, подключенный к его концам! Во-первых, по рамке течет индукционный ток, во-вторых — в проводах, соединяющих вольтметр с точками D и E, также возникает ЭДС индукции.

Для вычисления напряжения на вольтметре нарисуем эквивалентную схему цепи. Пусть R — сопротивление одной стороны рамки. Поскольку рамка сделана из однородной проволоки (ее сопротивление пропорционально длине), отрезок DE имеет сопротивление $R/3$, а остальная рамка $(8/3)R$. ЭДС индукции на отрезке DE, как было показано, равна $(1/6)\mathcal{E}$, значит, в остальной рамке — $(5/6)\mathcal{E}$. Работа вихревого электрического поля на дуге DVE равна его работе на отрезке DE — это следует из того, что магнитный поток через контур $DVED$ не изменяется (равен нулю). Значит, в проводах, соединяющих вольтметр с точками рамки, также действует ЭДС $(1/6)\mathcal{E}$ (сам вольтметр маленький — это позволяет пренебречь работой электрического поля на его размере и вообще не учитывать влияние этого поля на его функционирование). Сопротивление соединительных проводов можно не учитывать, поскольку ток по ним не течет (вольтметр идеальный).

В результате мы приходим к следующей эквивалентной схеме (см. рисунок). Ток по рамке равен



$$I = \frac{\mathcal{E}}{3R}$$

а напряжение на вольтметре

$$U = I\frac{R}{3} - \frac{\mathcal{E}}{6} + \frac{\mathcal{E}}{6} = \frac{\mathcal{E}}{9}$$

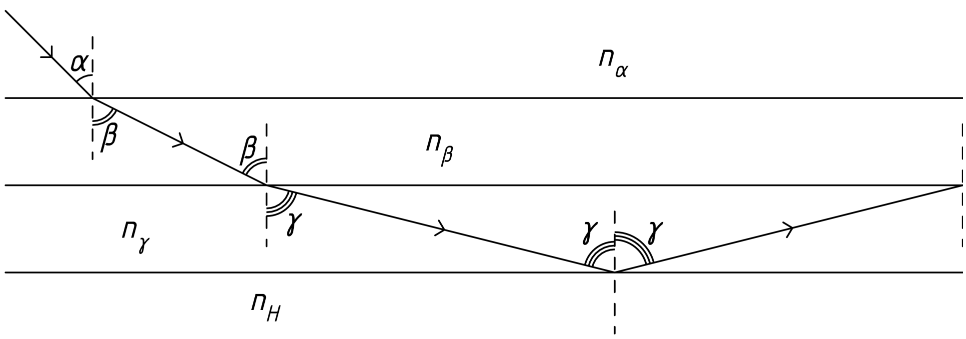
Это напряжение он и покажет.

Задача 5.

(10 баллов)

Природа наблюдаемого явления заключается в том, что луч света испытывает отражение, загибаясь в оптически неоднородных слоях горячего воздуха у поверхности дорожного покрытия. В отражении мы видим небо и далекие объекты, поэтому нам и кажется, что на дороге зеркальные лужи.

Разобьем воздух вблизи поверхности дороги на тонкие горизонтальные слои. Будем считать, что в каждом слое температура имеет определенное значение T_x, а показатель преломления n_x. Луч света тогда в пределах слоя идет по прямой под углом x к вертикали, а на границах слоев происходят



преломления. Записав для этих преломлений законы Снеллиуса

$$n_\alpha \sin\alpha = n_\beta \sin\beta$$
$$n_\beta \sin\beta = n_\gamma \sin\gamma$$
$$\dots$$

мы видим, что во всех слоях произведение $n_x \sin x$ равно одному и тому же значению.

Полное внутреннее отражение произойдет на том слое, где угол преломления станет равным $\pi/2$. Приравняв произведения $n_x \sin x$ для верхней (удаленной от дороги) точки и для слоя, на котором происходит отражение

$$n_\alpha \sin\alpha = n_x \sin\pi/2,$$

получаем значение показателя преломления, который должен иметь воздух у дороги, чтобы луч отразился:

$$n_x = n_\alpha \sin\alpha.$$

Здесь α — угол к вертикали, под которым луч приходит к наблюдателю, n_α – показатель преломления воздуха вдали от дороги (где его температура $30°C$). Воспользовавшись формулой из условия, находим:

$$n_\alpha = 1 + 0.000292 \times \frac{273}{(273+30)} \approx 1.000263.$$

Средний рост человека 1,7 м. Тогда угол к *горизонту*, под которым он видит дорогу на расстоянии 300 м, равен $\varphi \approx 1,7/300 \approx 0,0057$. Тогда

$$n_x = n_\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = n_\alpha \cos\varphi \approx n_\alpha \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \approx 1.000247.$$

Для такого показателя преломления необходима температура дорожного покрытия

$$T_x = \frac{0.000292}{n_x - 1} \times 273 \approx 323K,$$

что соответствует $50°$.

Критерии проверки.

Задача 1.

Всего — 5 баллов.

+3 балла: верно записаны условия равновесия шарика в начальный момент времени и через 10 часов;
−1 балл: не учтена масса оболочки в условии равновесия;
+2 балла: верно расчитано количество молей вышедшего газа и получен верный ответ;
−1 балл: неверный ответ, ошибка в вычислениях.

Задача 2.

Всего — 12 баллов.

а)
+1 балл: в явном виде записано, что процесс изохорный,верно записан закон Шарля;
+1 балл: верное нахождение точки начала конденсации пара;
+2 балла: верное нахождение тепла, отводимого на участке AB;
+1 балл: пренебрежение теплотой остывания пара и воды;
+1 балл: нахождение массы сконденсировавшейся воды;

б)
+2 балла: оценка ошибки давления;
+2 балла: оценка изменения температуры;
+2 балла: оценка тепла, выделеннного при остывании пара и воды и сравнение его со всем теплом, отводимом на участке BC.

Задача 3.

Всего — 10 баллов.

+4 балла: сказано, что правый конденсатор заряжается в два этапа;
+1 балл: найдена энергия правого конденсатора при его зарядке от левого конденсатора (первый этап);
+1 балл: найдена суммарная энергия конденсаторов после дозарядки от батареи;
+2 балла: найдена работа батереи по перемещению заряда;
+2 балла: получен верный ответ.

Задача 4.

Всего — 15 баллов.

+4 балла: сказано, что ЭДС одинакова для каждой из сторон шестиугольника и равна 1/6 от общей ЭДС за счет аксиальной симметрии электрического поля;
+4 балла: найдена ЭДС индукции в соединительных проводах;
+4 балла: построена верная эквивалентная схема;
+3 балла: сделан верный расчет и получен ответ.

Задача 5.

Всего — 10 баллов.

+3 балла: понимание, что происходит полное внутреннее отражение и верная запись законов преломления в таком случае;
+3 балл: разбиение слоя воздуха на много тонких слоев;
+1 балл: верно взят угол в законе преломления;
+2 балла: верное нахождение коэффициентов преломления при разных температурах;
+1 балл: получен верный ответ.