Задача 1.

Возможное решение:

Направим ось x вдоль склона, а ось y перпендикулярно склону. Пусть пушка запускает снаряд под углом β к склону. В момент падения снаряда его -координата

$$\nu \sin\beta t - \frac{g\cos\alpha t^2}{2} = 0 \Longrightarrow t = \frac{2\nu\sin\beta}{g\cos\alpha},$$

где t — время полёта снаряда. Дальность s полёта снаряда будет равна модулю его -координаты в момент падения:

$$s = \left|\nu\cos\beta t - \frac{g\sin\alpha t^2}{2}\right| = \left|\nu\cos\beta\frac{2\nu\sin\beta}{g\cos\alpha} - \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{2\nu\sin\beta}{g\cos\alpha}^2\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\nu^2}{g\cos^2\alpha}(\sin(2\beta)\cos\alpha - (1-\cos(2\beta))\sin\alpha)\right| = \left|\frac{\nu^2}{g\cos^2\alpha}(\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha)\right|.$$

При $\alpha + 2\beta = \pi/2$ получим наибольшее значение дальности при выстреле вверх по склону

$$s_1 = \frac{\nu^2}{g\cos^2\alpha}(1-\sin\alpha),$$

а при $\alpha + 2\beta = \frac{3\pi}{2}$ получим наибольшее значение дальности при выстреле вниз по склону

$$s_2 = \frac{\nu^2}{g\cos^2\alpha}(1+\sin\alpha).$$

Поскольку нижняя пушка стреляет вверх по склону, а верхняя вниз по склону, искомое отношение отрезков равно

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = 3.$$

Критерии оценивания:

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Записано уравнение движения снаряда	1 балл
Получено выражение для дальности полёта	1 балл
Найдена максимальная дальность полёта при выстреле вверх по склону	1 балл
Найдена максимальная дальность полёта при выстреле вниз по склону	1 балл
Получен ответ	1 балл

Задача 2.

Возможное решение:

После сжатия объём, занимаемый газами, равен $V = \frac{9\text{ л}}{3} = 3$ (объёмом, занимаемым жидкостями, можно пренебречь). Из уравнения состояния найдём количество газа первого вещества

$$\nu_1 = \frac{\rho_1 V}{RT} = \frac{7\text{ кПа}\cdot 3\text{ л}}{8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot K}\cdot 313K} = 0{,}008\text{ моль},$$

и количество газа второго вещества

$$\nu_2 = \frac{\rho_2 V}{RT} = \frac{17\text{ кПа}\cdot 3\text{ л}}{8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot K}\cdot 313K} = 0{,}02\text{ моль}.$$

Количество жидкости первого вещества равно $v_{1ж} = 0{,}05\text{ моль} - \nu_1 = 0{,}042\text{ моль}$, второго вещества $v_{2ж} = 0{,}05\text{ моль} - \nu_2 = 0{,}03\text{ моль}$. Масса жидкости в сосуде

$$m = 0{,}042\text{ моль}\cdot 18\frac{\text{г}}{\text{моль}} + 0{,}03\text{ моль}\cdot 46\frac{\text{г}}{\text{моль}} = 2\text{ г}.$$

Критерии оценивания:

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Использовано уравнение состояния идеального газа	1 балл
Найдено количество газа первого и второго вещества	2 балла
Найдено количество жидкости первого и второго вещества	1 балл
Получен ответ	1 балл

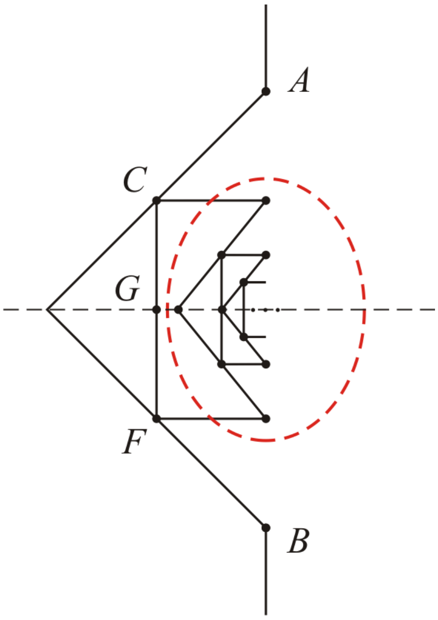
Задача 3.

Возможное решение:

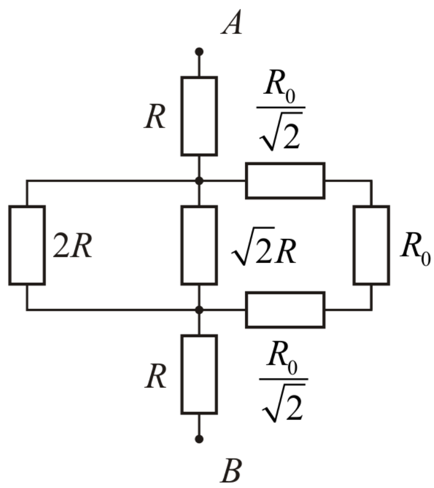
1. Периметр каждого вложенного квадрата в $\sqrt{2}$ раз меньше предыдущего, поэтому длину использованной проволоки можно найти как сумму геометрической прогрессии:

$$l = P + \frac{P}{\sqrt{2}} + \frac{P}{2} + \ldots = \frac{P}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 54{,}6 \text{ см.}$$

2. В силу симметрии относительно оси AB, схему можно разрезать вдоль этой оси на две половины, соединённые параллельно. Схема одной половины изображена на рисунке. Цепь можно разорвать в точке G, поскольку схема симметрична относительно горизонтальной оси, отмеченной пунктиром.



Сопротивление одной из двух параллельно соединённых половин будет в 2 раза больше общего сопротивления, то есть равно $2R_0$. Участок цепи, обведённый красным, является копией всей половины, уменьшенной в 2 раза. Поэтому сопротивление этого участка будет равно $\frac{2R_0}{2} = R_0$. Пусть сопротивление участка AC равно R. Изобразим эквивалентную схему:



Сопротивление этой цепи равно

$$R+\left(\frac{1}{2R}+\frac{1}{\sqrt{2}R}+\frac{1}{\frac{R}{\sqrt{2}}+R_0+\frac{R}{\sqrt{2}}}\right)^{-1}+R=2R\frac{(2+\sqrt{2})R_0+(4+2\sqrt{2})R}{(\sqrt{2}+1)R_0+(4+\sqrt{2})R}=2R_0.$$

После алгебраических преобразований получаем квадратное уравнение

$$R_0^2+\frac{2}{\sqrt{2}+1}RR_0-2\sqrt{2}R^2=0,$$

решая которое, получим

$$R_0=(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)R\Longrightarrow R=\frac{R_0}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}\approx 1\text{ Ом}.$$

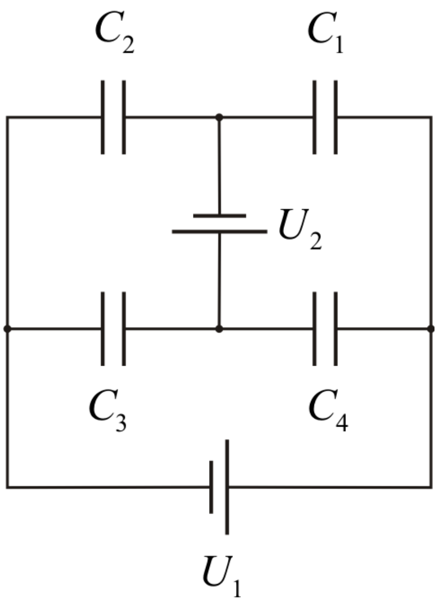
3. Если убрать внешний квадрат и подключиться к точкам EF, получится схема, подобная начальной, но в $\sqrt{2}$ раз меньше. Поэтому сопротивление

$$R_{EF}=\frac{R_0}{\sqrt{2}}\approx 0{,}93\text{ Ом}.$$

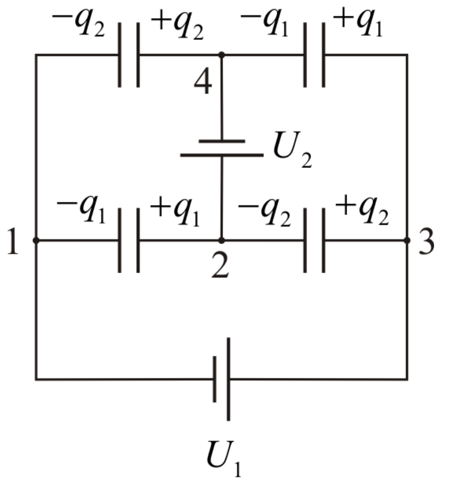
Критерии оценивания:
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдена общая длина использованной проволоки	1 балл
Из соображений симметрии и подобия получена эквивалентная схема	1 балл
Найдено сопротивление участка AC	2 балла
Найдено R_{EF}	1 балл

Задача 4.
Возможное решение:
Перерисуем схему следующим образом:



Получившаяся схема отличается от исходной только полярностью источников (ведь ёмкости всех конденсаторов одинаковые). Но замена полярности всех источников приведёт лишь к тому, что знаки всех зарядов поменяются, но заряды не изменятся по модулю. Поэтому заряды конденсаторов C_1, C_3 и C_2, C_4 в исходной схеме попарно равны:



Пройдя по контуру 13421 и приравняв падение напряжения на конденсаторах к напряжению источников получим

$$\frac{2q_1}{C} = U_1 + U_2 \Longrightarrow q_1 = \frac{C}{2}(U_1 + U_2).$$

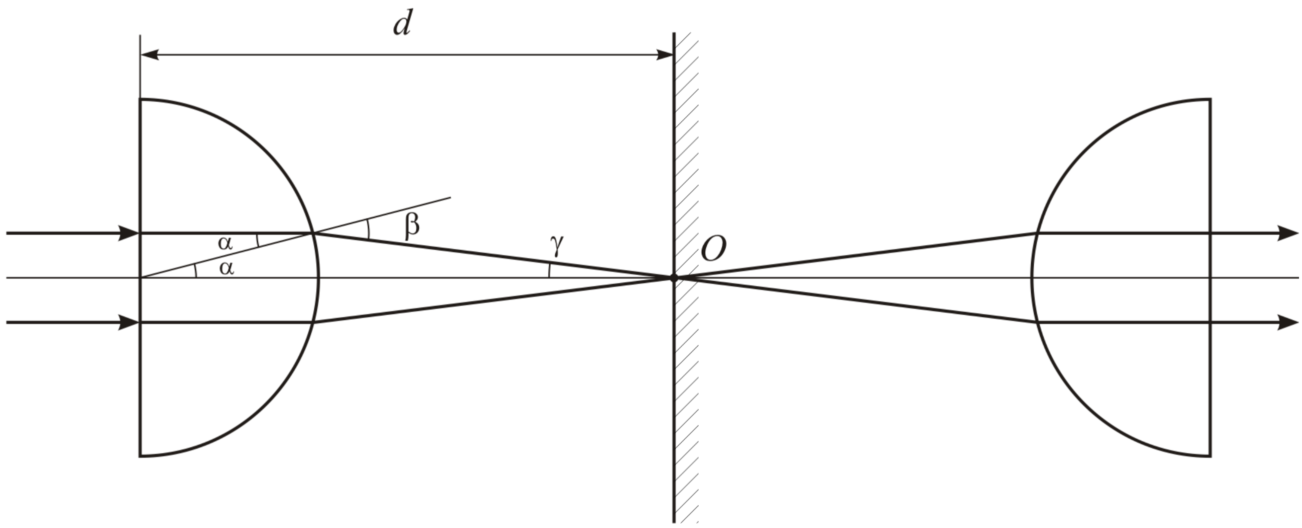
Аналогично для контура 13241 получим

$$\frac{2q_2}{C} = U_1 - U_2 \Longrightarrow q_1 = \frac{C}{2}(U_1 - U_2).$$

Критерии оценивания:
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Получено,что заряды конденсаторов C_1, C_3 и C_2, C_4 попарно равны	2 балла
Хотя бы для одного контура записано равенство падения напряжения на конденсаторах напряжению источников	1 балл
Найден заряд q_1	1 балл
Найден заряд q_2	1 балл

Задача 4.
Возможное решение:
Если после преломления на полусфере пучок соберётся в точке пересечения зеркала с осью симметрии полусферы (в точке O), то отражённый пучок полностью совпадёт с падающим, и, поскольку ход световых лучей обратим, после повторного преломления на полусфере выйдет параллельным.



По закону преломления $n\sin\alpha = \sin\beta$, из геометрических соображений $\gamma = \beta - \alpha$. Поскольку пучок узкий, можно пользоваться параксиальным приближением, тогда

$$\bar{\beta} \approx n\alpha,$$
$$\bar{\gamma} \approx (n-1)\alpha,$$
$$\bar{R}\sin\alpha = (d-R)\sin\gamma \Longrightarrow R\alpha \approx (d-R)\gamma \Longrightarrow d \approx \frac{n}{n-1}R.$$

Критерии оценивания:
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что пучок должен собраться в точке O	1 балл
Правильно записан закон преломления	1 балл
Использовано параксиальное приближение	1 балл
Получен правильный ответ	2 балла