Задача 1.

Артём написал на доске два двузначных числа, одно из которых простое. Оказалось, что одна из цифр в записи этих двух чисел совпадает. Сергей поменял местами две другие цифры в этих числах, полученные числа перемножил и получил 2016. Чему было равно произведение исходных чисел?

Ответ: 828.

Решение.

Заметим, что 2016 можно представить в виде произведения двух двузначных чисел шестью способами:

$$2016 = 21 \cdot 96 = 24 \cdot 84 = 28 \cdot 72 = 32 \cdot 63 = 36 \cdot 56 = 42 \cdot 48.$$

Числа в паре $(21; 96)$ не содержат общих цифр. А для пар $(24; 84)$, $(28; 72)$, $(36; 56)$ и $(42; 48)$ среди чисел, получающихся при перестановке цифр, нет простых. Таким образом, Сергей перемножил числа 32 и 63, а Артём написал на доске числа 36 и 23, произведение которых равно 828.

Критерии оценки:.

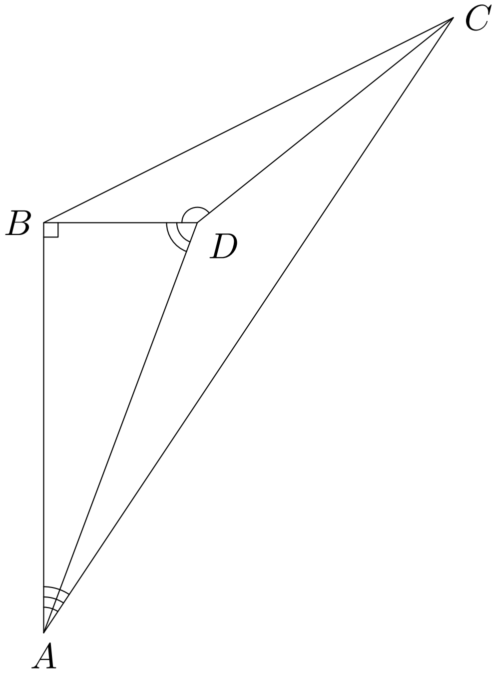
+	Задача верно решена
+.	Ход решения верный, но в нём допушена арифметическая ошибка, возможно повлекшая неправильный ответ
+-	Решение сводится к рассмотрению случаев разложения 2016 на двузначные множители, но при этом рассмотрены не все случаи
-	Приведён пример, но не обоснованно, что других нет
-	Задача не решена

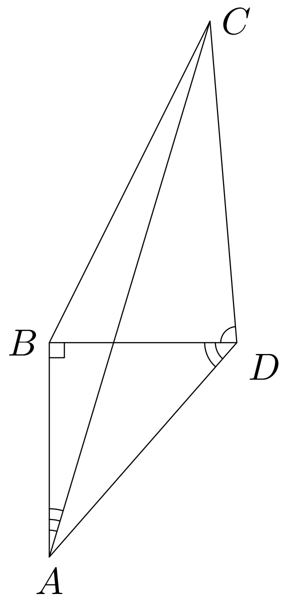
Задача 2.

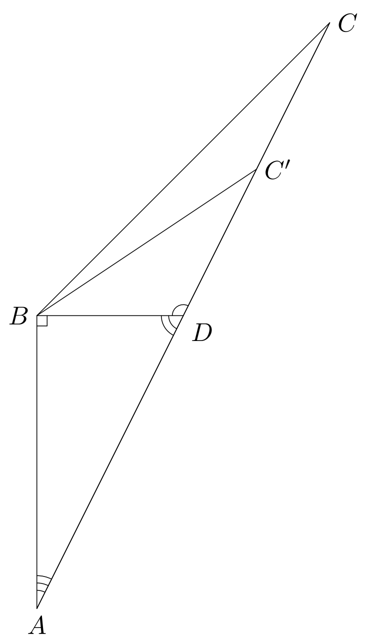
В треугольнике ABC угол B — тупой. На плоскости отмечена точка D такая, что $\angle BDC - \angle ADB = 2\angle BAC$, $\angle ABD = 90°$, причём точки C и D лежат с одной стороны от прямой AB. Докажите, что $AD = CD$.

Доказательство.

Имеет место один из трёх случаев: точка D может быть внутри или вне треугольника ABC, а также на стороне AC.







Разберём эти три случая.

- Пусть точка D внутри треугольника ABC. Положим $\angle BDC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$. Тогда $\angle BAD = 90° - \beta$. Таким образом, $\angle CAD = \dfrac{\alpha - \beta}{2} - (90° - \beta) = \dfrac{\alpha + \beta - 180°}{2} > 0$. При этом $\angle ADC = 360° - \alpha - \beta$, откуда $\angle ACD = 180° - \angle ADC - \angle CAD = \dfrac{\alpha + \beta - 180°}{2} = \angle CAD$. Значит, треугольник ACD равнобедренный, и $AD = CD$.

- Пусть точка D вне треугольника ABC. Положим $\angle BDC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$. Тогда $\angle BAD = 90^\circ - \beta$. Таким образом, $\angle CAD = (90^\circ - \beta) - \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \dfrac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} > 0$. При этом $\angle ADC = \alpha + \beta$, откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ADC - \angle CAD = \dfrac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \angle CAD$. Значит, треугольник ACD равнобедренный, и $AD = CD$.
- *Вообще говоря, имеет место третий случай, когда точка D лежит на стороне AC. В этом случае всегда $\angle BDC - \angle BDA = 2\angle BAD$. В таком случае вершину C треугольника ABC можно заменить на любую точку C' луча DC, и условие задачи останется выполненным. При этом очевидно, что условие $AD = CD$ будет нарушено при замене C на C'.*

Критерии оценки:.

+	Задача верно решена
+	Рассмотрен случай, когда точка D принадлежит AC, и показано, что в этом случае требование задачи может не выполняться
+-	Решение задачи зависит от расположения точки D относительно прямой AC, но рассмотрен только один случай из двух
-	Задача не решена

Задача 3.

Коробка конфет имеет форму прямоугольника размером $2a$ на $2b$ так, что в каждой из клеток лежит одна конфета. Винни-Пух и Пятачок по очереди берут из неё конфеты. Сначала проголодавшийся Винни-Пух берёт две конфеты, лежащие в соседних по стороне клетках, затем Пятачок берёт одну конфету. Когда Винни-Пух не может взять две конфеты, лежащие в соседних клетках, он расстраивается, уходит, и все оставшиеся конфеты достаются Пятачку. Какое наибольшее количество конфет сможет гарантированно добыть Пятачок вне зависимости от того, как будет действовать Винни-Пух?

Ответ: $2ab$.

Решение.

Заметим, что коробку можно разделить на $2ab$ прямоугольников 2×1. Если Винни-Пух в каждый свой ход будет брать конферты из одного из этих прямоугольников, то он возьмёт не менее $2ab$ конфет, поскольку Пятачок за ab ходов может взять конфеты не более чем из ab прямоугольников. Таким образом, Винни-Пух сможет добыть не менее $2ab$ конфет.

Покажем, что Пятачок сможет добыть не менее $2ab$ конфет. Будем считать, что половина конфет из белого шоколада, а половина из чёрного, причём они расположены в коробке в шахматном порядке. Заметим, что Винни-Пух каждый ход берёт одну конфету из чёрного шоколада и одну конфету из белого шоколада. Пусть Пятачок ест только конфеты из белого шоколада. Тогда за каждый ход берётся одна конфета из белого шоколода, поэтому всего будет сделано не более $2ab$ ходов, после чего Винни-Пух не сможет ходить дальше. Таким образом, Винни-Пух возьмёт не более $2ab$ конфет, а оставшиеся конфеты достанутся Пятачку.

Критерии оценки:.

+	Задача верно решена
-+	Приведена наилучшая стратегия только одного персонажа из двух. Обоснование, почему при этом он не сможет получить больше конфет, отсутствует.
-	Задача не решена

Задача 4.

Есть n человек из m стран, некоторые из которых знакомы между собой, при этом $n > m$. Известно, что если несколько людей встанут в хоровод и возьмутся за руки так, что любые два соседа дружат, то обязательно найдётся человек, у которого оба соседа из разных стран. Какое может быть наибольшее число пар знакомств?

Ответ: $nm - \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Решение.

Пусть из страны i есть n_i человек. Если в каком-то хороводе у каждого человека оба соседа из одной страны, то либо все люди в этом хороводе из одной страны, либо в этом хороводе чередуются люди из двух стран. Если в группе из k людей более $k-1$ пар знакомств, то в этой группе людей обязательно будет существовать *цикл* (то есть последовательность людей такая, что первый знаком со вторым, второй знаком с третьим, ..., последний знаком с первым). Таким образом, для выполнения условия задачи необходимо, чтобы для представителей страны i было не более $n_i - 1$ пар знакомств между собой, а в между людьми из пары стран i и j было не более $n_i + n_j - 1$ знакомства.

Следовательно, общее число пар знакомств не превосходит

$$\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}(n_i+n_j-1)=n-m+(m-1)n-\frac{m(m-1)}{2}=nm-\frac{m(m+1)}{2}.$$

Покажем, что число пар знакомств может равняться $nm-\dfrac{m(m+1)}{2}$. Пусть из первой страны $n-m+1$ человек, среди которых один знаком со всеми остальными соотечественниками, а другие не знакомы между собой. Если из оставшихся $m-1$ стран по одному человеку, который знаком со всеми, то условие задачи выполняется. При этом количество пар знакомств равно

$$(n-m)+(m-1)(n-m+1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}=nm-\frac{m(m+1)}{2}.$$

Критерии оценки:.

+	Задача верно решена
+-	Верно сделана оценка на максимальное количество пар знакомств, но не приведён пример, подтверждающий, что эта оценка достигается
-+	Приведён пример, для которого число знакомств максимально, но не обосновано, почему знакомств не может быть больше
-	Задача не решена

Задача 5.

Любой ли многочлен с вещественными коэффициентами можно представить в виде суммы кубов трёх многочленов с вещественными коэффициентами?

Ответ: Да, любой.

Решение.

Пусть $P(x)$ — произвольный многочлен с вещественными коэффициентами. Рассмотрим многочлены $P(x)+\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, $P(x)-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ и $-\sqrt[3]{2}\cdot P(x)$. Тогда

$$\left(P(x)+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3+\left(P(x)-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3+\left(-\sqrt[3]{2}\cdot P(x)\right)^3=$$

$$=(P(x))^3+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot(P(x))^2+\frac{1}{2}\cdot P(x)+\frac{\sqrt{6}}{36}+(P(x))^3-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot(P(x))^2+\frac{1}{2}\cdot P(x)-\frac{\sqrt{6}}{36}-2\,(P(x))^3=$$
$$=P(x).$$

То есть любой ли многочлен с вещественными коэффициентами можно представить в виде суммы кубов трёх многочленов с вещественными коэффициентами.

Критерии оценки:.

+	Задача верно решена
-	Задача не решена