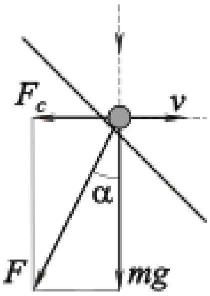
Задача 1.

Почему ускорение шарика перед ударом отличается от ускорения свободного падения? В условии задачи не упомянуты другие тела (кроме Земли), с которыми шарик бы взаимодействовал. Поэтому единственной причиной отличия его ускорения от g может быть только сопротивление воздуха (то, что он падает в воздухе, разумеется, предполагается по умолчанию).

Пусть масса шарика равна m. Силу сопротивления F_c, действующую на него непосредственно перед ударом о доску, легко найти из II закона Ньютона:

$$mg/2 = mg - F_c$$
$$F_c = mg/2.$$



В результате удара скорость шарика не изменится по модулю, но станет направлена горизонтально (удар упругий). Поэтому сила сопротивления сразу после удара будет по модулю такой же, как и до него (эта сила зависит только от скорости и от формы тела), а ее направление изменится на горизонтальное (против вектора новой скорости шарика). Полная сила F, действующая на шарик, будет равна векторной сумме F_c и силы тяжести mg (см. рисунок). Ее модуль будет равен

$$F = \sqrt{F_c^2 + (mg)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}mg,$$

а угол α, который она образует с вертикалью, определится условием

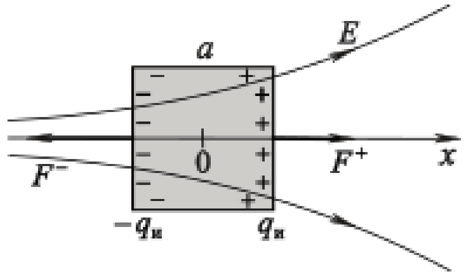
$$\tan\alpha = \frac{F_c}{mg} = \frac{1}{2}.$$

Тогда модуль ускорения шарика сразу после удара по II закону Ньютона будет равен

$$a_1 = F/m = \frac{\sqrt{5}}{2}g,$$

а его направление будет совпадать с направлением вектора F.

Задача 2.



а) Под действием электрического поля свободные носители электрического заряда (электроны) в кубике начнут перемещаться. В результате на правой поверхности кубика возникнет положительный индукционный заряд q_u, а на левой – отрицательный $-q_u$. По модулю эти заряды будут одинаковы, поскольку полный заряд кубика равен нулю. Перемещение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока их электрическое поле не скомпенсирует внешнее поле во всех точках внутри кубика. При этом на положительный индукционный заряд со стороны внешнего поля будет действовать направленная вправо сила $F^+ = q_u\ E_1$, а на отрицательный – направленная влево сила $F^- = q_u E_2$, где E_1 и E_2 – напряженности поля на правой и левой гранях кубика соответственно. Поскольку $E_2 > E_1$, то $F^- > F^+$. Значит, полная сила, действующая на кубик, будет направлена влево и равна $F_1 = F^- - F^+$.

б) Если теперь сообщить кубику некоторый положительный заряд q, то на этот заряд будет действовать со стороны внешнего поля электрическая сила F_2, направленная вправо (по полю) и прямо пропорциональная величине заряда q. Сила F_1 также продолжит действовать (от заряда q она не зависит). При достаточно малых q сила F_2 окажется меньше F_1 и полная действующая на кубик сила $F = F_1 - F_2$ будет по-прежнему направлена влево. Если же увеличивать сообщенный заряд, F_2 рано или поздно превысит F_1 и полная сила станет направлена вправо.

в) Оценим силы F_1 и F_2. Величина индукционных зарядов qi определяется тем, что их электрическое поле внутри кубика должно полностью скомпенсировать внешнее поле. Для оценки будем считать, что эти заряды распределены только по левой и правой граням кубика, а создаваемое каждым из них поле можно найти как поле бесконечной плоскости, заряженной с поверхностной плотностью заряда $\sigma = q_u/a^2$. Поля этих плоскостей внутри кубика складываются, их сумма должна скомпенсировать внешнее поле, которое будем считать равным E_0 (полю в центре кубика). Тогда

$$E_0 \sim 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q_u}{\varepsilon_0 a^2}.$$

Отсюда получаем: $q_u \sim \varepsilon_0 a^2 E_0$. Для силы F_1 тогда имеем:

$$F_1 = q_u E_2 - q_u E_1 = q_u(E_0 + k\frac{a}{2}) - q_u(E_0 - k\frac{a}{2}) = q_u ka \sim \varepsilon_0 a^3 k E_0.$$

Поскольку внешнее поле на размере кубика слабо неоднородно, силу F_2 можно считать равной произведению заряда q на напряженность поля в центре кубика: $F_2 \approx qE_0$.

Из сказанного в пункте б) ясно, что величина граничного заряда q_0 определяется условием $F_1 = F_2$, то есть

$$\varepsilon_0 a^3 k E_0 \sim q_0 E_0.$$

Отсюда получаем: $q_0 \sim \varepsilon_0 a^3 k$.

Задача 3.

Описанный в задаче способ получения сверхсильных магнитных полей называется **магнитной кумуляцией**.

а) Если магнитный поток Φ через проводящий контур изменяется, то в нем возникает ЭДС индукции $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ (закон Фарадея). По закону Ома для замкнутой цепи эта ЭДС в любой момент равна произведению силы тока в контуре I на его сопротивление R:

$$IR = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Отсюда видно, что, если сопротивление контура пренебрежимо мало ($R = 0$), то $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, то есть $\Phi = const$ – магнитный поток через такой контур сохраняется.

б) Найдем индукцию магнитного поля в лайнере B, когда его радиус в результате сжатия взрывной волной станет равен r. Приравняв магнитные потоки в начальный и в интересующий нас моменты, получаем:

$$\pi r_0^2 B_0 = \pi r^2 B$$
$$B = \frac{r_0^2}{r^2} B_0.$$

Найдем также энергию магнитного поля лайнера W в этот момент. Плотность энергии поля равна

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{r_0^4}{r^4} B_0^2.$$

Умножив ее на объем трубы-лайнера $V = \pi r^2 l$, получим искомую энергию:

$$W = w\pi r^2 l = \frac{\pi}{2\mu_0} B_0^2 l \frac{r_0^4}{r^2}.$$

Как видим, эта энергия быстро возрастает при сжатии лайнера ($W \sim 1/r^2$). Откуда она берется? Ее сообщают лайнеру силы давления продуктов взрыва – по мере сжатия они совершают над стенками трубы работу A, которая и идет на увеличение магнитной энергии системы:

$$A = W - W_0.$$

Отсюда понятно, до каких пор будет происходить сжатие и нарастание магнитного поля. Сжатие прекратится, когда будет исчерпана энергия продуктов взрыва, которую они приобрели при детонации взрывчатки. Равна ли максимальная работа, совершаемая ими над стенками трубы, полной энергии взрыва $E = qm$? Разумеется, нет – ведь взрывная волна распространяется во все стороны, а не только в сторону лайнера. Оценить из простых соображений, какая доля выделившейся энергии уходит на совершение работы по сжатию, не представляется возможным – это довольно специальный взрывотехнический вопрос. В качестве грубой оценки будем считать, что на сжатие уходит половина полной выделившейся энергии:

$$A \sim \frac{1}{2} E = \frac{1}{2} qm \approx 10^7 \text{Дж}.$$

Будем также считать, что в момент максимального сжатия $r \ll r_0$. Тогда начальная магнитная энергия W_0 мала по сравнению с конечной энергией W и ею можно пренебречь. Минимальный радиус лайнера тогда определит условие:

$$A = W = \frac{\pi}{2\mu_0} B_0^2 l \frac{r_0^4}{r^2},$$

из которого получаем:

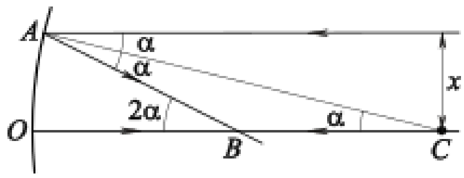
$$r = \sqrt{\frac{\pi B_0^2 l r_0^4}{2\mu_0 A}} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,5 \text{ мм}.$$

Мы подставили численные параметры нашей установки. Как видим, условие $r \ll r_0$ действительно выполняется. Теперь можно найти максимальное магнитное поле:

$$B = \frac{r_0^2}{r^2} B_0 \approx 1,6 \cdot 10^3 \text{ Тл}.$$

Задача 4.

а) Рассмотрим луч, идущий параллельно оптической оси зеркала на расстоянии x от нее. Поскольку луч параксиальный, $x \ll R$. Найдем, на каком расстоянии от зеркала отраженный луч пересечет оптическую ось. Обозначим точки: A – точка падения луча на зеркало, B – точка, в которой отраженный луч пересекает оптическую ось, C – центр кривизны зеркала, O – центр зеркала. Заметим, что расстояния $AC = OC = R$ – радиусу кривизны зеркала. Поскольку AC – радиус сферической поверхности зеркала (нормаль к ней), угол между этим отрезком и падающим лучом – угол падения луча на зеркало. Обозначим этот угол α. Тогда по закону отражения $\angle CAB = \alpha$. Но $\angle ACB$ также равен углу между падающим лучом и радиусом AC (это накрест лежащие углы), то есть $\angle ACB = \alpha$. Из равенства $\angle ACB = \angle CAB$ следует, что треугольник ΔABC – равнобедренный. Если $x \ll R$, то $\alpha \ll 1$. Тогда можно приближенно считать, что каждая из боковых сторон ΔABC равна половине его основания: $AB = BC \approx AC/2 = R/2$. Значит, отраженный луч пересекает оптическую ось на расстоянии $OB = OC - BC \approx R/2$ от зеркала. Как видим, это расстояние не зависит от x, то есть в этом приближении все лучи, идущие параллельно оптической оси зеркала, после отражения проходят через одну и ту же точку B. Эта точка тогда является фокусом зеркала. Фокусное расстояние



$$F = OB = \frac{R}{2}.$$

б) Теперь вычислим расстояние OB более точно. Обозначим $AB = BC = l$. Поскольку высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является также медианой, имеем:

$$2BC \cos\alpha = AC,$$

то есть

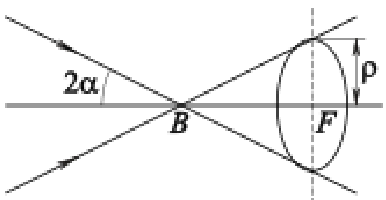
$$2l\cos\alpha = R.$$

Отсюда получаем:

$$l = \frac{R}{2\cos\alpha} \approx \frac{R}{2(1-\frac{\alpha^2}{2})} \approx \frac{R}{2}(1+\frac{\alpha^2}{2}).$$

Здесь мы учли, что $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ при $\alpha \ll 1$, а также что $\frac{1}{1=x} \approx 1 + x$ при $x \ll 1$. Теперь находим:

$$OB = R - l \approx \frac{R}{2} - \frac{R\alpha^2}{4} = F - \Delta s.$$



Мы ввели обозначение $\Delta s = R\alpha^2/4$. Как видим, лучи, падающие на зеркало под конечными углами α, собираются на самом деле не в точке фокуса (на расстоянии $R/2$ от зеркала, где собираются бесконечно близкие к оси лучи), а немного ближе. Причем сдвиг Δs оказывается тем больше, чем больше угол падения α, то есть чем дальше от оптической оси идут лучи. Представим теперь себе, что происходит в районе фокуса зеркала (см. рисунок). Лучи, падавшие на зеркало под углом α собираются в точке B, а затем расходятся из этой точки, образуя конус. В результате в фокальной плоскости эти лучи дают не точку, а небольшую окружность. Найдем радиус этой окружности ρ. Поскольку $BF = \Delta s$, а отраженные от зеркала лучи образуют угол 2α с оптической осью (см. рисунок к пункту а), имеем:

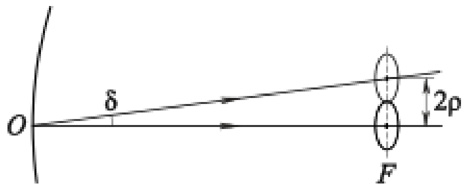
$$\rho = \Delta s \tan 2\alpha \approx 2\Delta s\alpha = \frac{1}{2}R\alpha^3.$$

Здесь мы учли, что тангенс малого угла приближенно равен этому углу. Как видим, лучи, падающие на зеркало под разными углами, дают в фокальной плоскости окружности разных радиусов. В совокупности все эти окружности образуют светлое пятно, радиус которого, очевидно, равен радиусу самой большой окружности. Окружность наибольшего радиуса дают лучи, падающие на самый край зеркала, под наибольшим углом падения.

Для этих лучей $x = r$ (радиусу зеркала), а угол их падения $\alpha \approx \sin\alpha = r/R$. Подставив его в формулу для ρ, получаем радиус светлого пятна:

$$\rho = \frac{1}{2}\frac{r^3}{R^2}.$$

Допустим, мы рассматриваем в наш телескоп две звезды, угловое расстояние между которыми равно δ. Тогда из закона отражения следует, что угол между отраженными зеркалом лучами от этих звезд также будет равен δ. Для того, чтобы их изображения не сливались, необходимо, чтобы расстояние между центрами соответствующих светлых пятен в фокальной плоскости было не меньше, чем диаметр пятна 2ρ . Пограничная ситуация показана на рисунке. Как видно из него, минимальный угол δ, при котором изображения еще не сливаются, равен



$$\delta \approx \tan\delta = \frac{2\rho}{F} = \frac{4\rho}{R} = 2(\frac{r}{R})^3.$$

Подставив параметры нашего зеркала, получаем $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$рад $\approx 0,1°$. Это очень плохая разрешающая способность. Угловой размер Луны на небе составляет приблизительно $0,5°$. Наш телескоп, таким образом, не сможет разделить детали лунной поверхности, если расстояние между ними меньше $1/5$ диска Луны! Зеркало с таким соотношением R и r обязательно должно быть параболическим.

Задача 5.

а) Движущаяся часть цепочки – участок BCD. При этом сразу после сообщения ему скорости v_0 участки BC и CD имеют одинаковые длины. Действующие на них силы тяжести тогда тоже одинаковы, а поскольку приложены они по разные стороны от блока, сила тяжести никакого ускорения цепочке не сообщает. Однако в процессе движения в точке B будет происходить разгон ранее покоившихся звеньев цепочки. Поэтому в этой точке между движущейся и покоящейся частями будет действовать сила натяжения T. Найдем величину этой силы. Пусть прошло время Δt, настолько малое, что изменением скорости движущейся части можно пренебречь. Тогда за это время точка D опустится на расстояние $v_0\Delta t$, а точка B поднимется на расстояние $(v_0\Delta t)/2$. Участок цепочки длиной $(v_0\Delta t)/2$ разгонится от нуля до скорости $v0$. Масса этого участка $\Delta m = (\rho v_0 \Delta t)/2$, значит, его импульс изменится на

$$\Delta p = \Delta m v_0 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \Delta t.$$

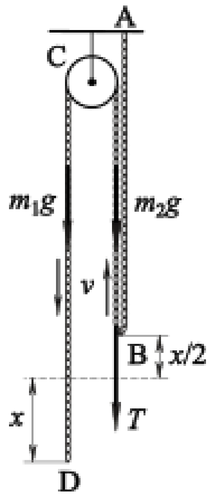
Этот импульс ему сообщает сила натяжения T. Тогда по закону сохранения импульса

$$T\Delta t = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \Delta t \to T = \frac{1}{2}\rho v_0^2.$$

Эта сила действует на звенья покоящегося участка вверх, а на движущийся участок – вниз (по III закону Ньютона). Поскольку масса движущегося участка BCD равна $m = 2\rho l$, его ускорение

$$a = -\frac{T}{m} = -\frac{v_0^2}{4l}.$$

б) Когда конец цепочки D опустится на расстояние x, точка B поднимется на расстояние $x/2$ (см. рисунок). Сила тяжести, действующая на участок CD, станет равна $m_1 g = \rho(l + x)g$, а на участок BC – $m_2 g = \rho(l - x/2)g$. Для того, чтобы ускорение цепочки было равно нулю, разность этих сил должна уравновесить сила натяжения T, действующая в точке B на участок BC:

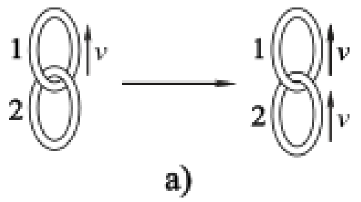


$$m_1 g - m_2 g = T.$$

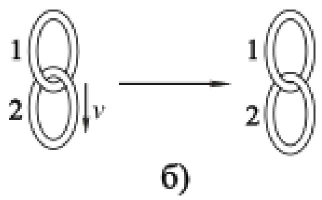
Если сообщенная цепочке скорость равна v, то сила натяжения $T = 1/2\rho v^2$ (см. предыдущий пункт). Подставив выражения для сил в условие нулевого ускорения, получаем искомую скорость:

$$v = \sqrt{3gx}.$$

в) Во время движения нашей системы тепло будет выделяться в точке B – потому, что в этой точке происходит резкий, ударный разгон звеньев цепочки. Рассмотрим внимательно, как это происходит.



На рисунке а) показаны два соседних звена цепочки. 1 – самое нижнее звено участка BC, оно уже движется вверх со скоростью v. 2 – нижнее звено участка AB, его скорость еще равна нулю (слева). После удара одного звена о другое звено 2 также приобретает скорость v и дальше движется вместе со всем участком BC (возможно, после нескольких «подпрыгиваний» и раскачиваний) (справа).



Для того, чтобы найти количество выделившегося при этом ударе тепла, перейдем в систему отсчета, движущуюся вертикально вверх с постоянной скоростью v относительно исходной с.о. (будем называть ее с.о. остановки). Заметим, что такая система отсчета инерциальна. Происходящее в ней показано на рисунке б). Вначале звено 1 покоится, а звено 2 движется со скоростью v вниз. После удара звено 2 теряет скорость и останавливается. Как видим, это действительно система отсчета остановки – в ней происходит не разгон, а поочередная остановка звеньев цепочки. И происходит это, как видно в этой с.о., в результате абсолютно неупругих ударов, при которых вся кинетическая энергия звеньев переходит в тепло. Значит, если за время Δt в этой системе отсчета останавливается цепочка массой Δm, в ней выделяется тепло

$$\Delta Q = \frac{\Delta m v^2}{2}.$$

Тепло (тепловая энергия) в нерелятивистской физике не зависит от системы отсчета. Значит, в исходной системе отсчета будет наблюдаться точно такое же тепловыделение. Поскольку $\Delta m = \rho v \Delta t/2$ (см. выше), то

$$\Delta Q = \frac{1}{4}\rho v^3 \Delta t,$$

а тепловая мощность:

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t}/ = \frac{1}{4}\rho v^3.$$