Заключительный этап ТурЛома-2024

1. Пусть $x < y$ — положительные действительные числа такие, что

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \qquad \text{и} \qquad \sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}=5.$$

Найдите x.

Ответ. $\frac{49}{36}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$ и $\sqrt{y+2}+\sqrt{y}$ через a и b соответственно. Заметим, что

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\frac{(x+2)-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{2}{a},$$

аналогично $\sqrt{y+2}-\sqrt{y}=\dfrac{2}{b}$.

Из условия легко видеть, что $a+b=9$, $\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}=1$; второе равенство переписывается как $2\cdot\dfrac{a+b}{ab}=1$, т.е. $ab=18$. Числа, сумма которых равна 9, а произведение равно 18 — это, как можно понять из теоремы Виета, 3 и 6. По условию $x<y$, т.е. $a<b$, откуда $a=3$.

Осталось найти x из условия $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}=3$. Например, это можно сделать так:

$$\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})-(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{2}=\frac{3-2/3}{2}=\frac{7}{6},$$

откуда $x=\dfrac{49}{36}$.

2. Какое наибольшее количество непересекающихся троек попарно различных натуральных чисел можно выбрать среди чисел от 1 до 2024 так, чтобы в каждой тройке одно число равнялось произведению двух других?

Ответ. 43.

Решение. Для начала докажем, что больше 43 троек выбрать не удастся. Упорядочим числа в каждой тройке (a_i, b_i, c_i) по возрастанию: $a_i<b_i<c_i$. Кроме того, упорядочим тройки по наименьшему элементу: $a_1<a_2<\ldots<a_k$. Заметим, что $a_1>1$, т.к. иначе $b_1=c_1$. Значит, $a_2>2$, $a_3>3$, $\ldots$, $a_k>k$. Тогда

$$(k+1)(k+2)\leqslant a_kb_k=c_k\leqslant 2024.$$

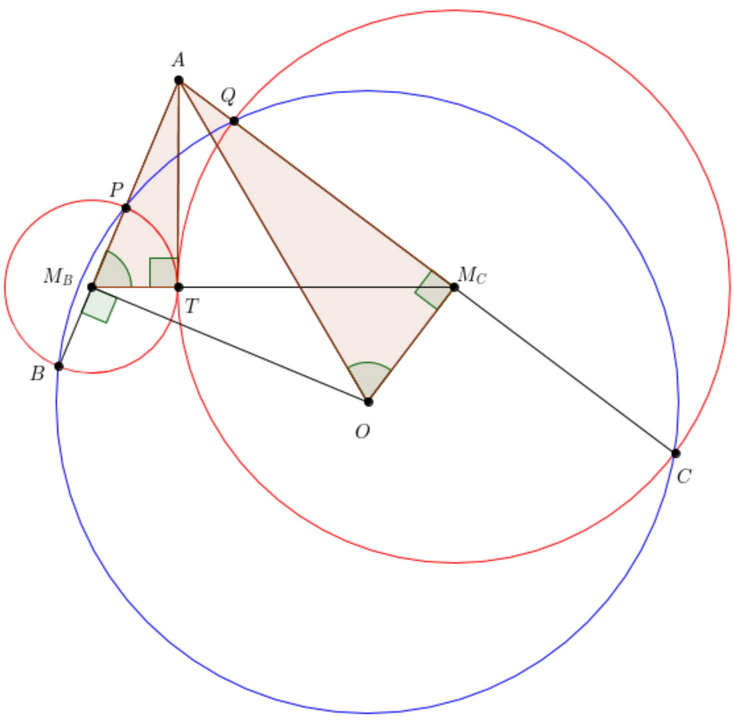
Это неравенство не выполняется уже при $k=44$. Значит, $k\leqslant 43$.

Теперь приведём пример 43 троек. Для этого достаточно взять тройки вида $(45-\ell, 45+\ell, 2025-\ell^2)$ для всех $\ell\in\{1,2,\ldots,43\}$. Осталось лишь проверить, что эти тройки не пересекаются. Для этого достаточно проверить, что наименьшее возможное число вида $2025-\ell^2$ больше, чем наибольшее возможное число вида $45+\ell$, что очевидно, ведь они отличаются умножением на $45-\ell>1$.

3. Окружность с центром в точке O проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Предположим, что окружности с диаметрами BP и CQ касаются друг друга внешним образом в точке T. Найдите длину отрезка AO, если $AB=18$, $AC=36$ и $AT=12$.

Ответ. $\frac{65}{3}$.

Решение. Заметим, что для указанных в условии трёх окружностей прямые AB, AC и общая касательная в точке T — радикальные оси трёх пар этих окружностей. Поэтому они пересекаются в одной точке — это очевидно точка A. Пусть M_B и M_C — середины отрезков BP и CQ соответственно.



Заметим пару интересных фактов:

- M_B и M_C — центры окружностей, построенных на BP и CQ как на диаметрах соответственно; значит, точка касания T этих окружностей лежит на отрезке M_BM_C;

- M_B — середина хорды окружности $(BPQC)$, значит $OM_B \perp AB$; аналогично $OM_C \perp AC$.

Из того, что $\angle OM_BA = \angle OM_CA = 90°$, следует, что четырёхугольник M_BAM_CO — вписанный, откуда $\angle AOM_C = \angle AM_BM_C$. Поскольку AT — радикальная ось окружностей с центрами M_B и M_C, то $AT \perp M_BM_C$. Так как T лежит на M_BM_C, то $\angle ATM_B = 90° = \angle AM_CO$. Значит, треугольники AM_BT и AOM_C подобны, откуда мы и найдём AO:

$$AO = AM_B \cdot \frac{AM_C}{AT}.$$

Осталось найти AM_B и AM_C.

Для этого заметим, что по теореме о секущей и касательной $AP \cdot AB = AT^2$, откуда $AP = \frac{12^2}{18} = 8$. Аналогично, $AQ = \frac{12^2}{36} = 4$. Далее, например, из равенств $2AM_B = AB + AP$ и $2AM_C = AC + AQ$, получаем, что $AM_B = 13$, $AM_C = 20$. Значит, $AO = \frac{13 \cdot 20}{12} = \frac{65}{3}$.

4. Назовём *словом* любую последовательность букв. Со словами разрешается проделывать следующие операции: 1) удалить первую букву слова; 2) удалить последнюю букву слова; 3) добавить копию слова после него. Например, если исходное слово — ABC, применение операций даст BC, AB и ABCABC соответственно. Верно ли, что с помощью таких операций можно в любом слове переставить буквы в любом порядке?

Ответ. Да, верно.

Решение. Докажем, что если у нас имеется некоторое слово XY...ZT, то можно его циклически сдвинуть, т.е. получить слово TXY...Z. Для этого добавим копию нашего слова: XY...ZTXY...ZT, а потом просто удалим из начала XY...Z и T из конца.

Теперь научимся получать из любого слова w слово w', получаемое из w перестановкой букв. Для этого

- запишем слово w много раз 2^k раз подряд, где 2^k больше, чем длина слова w, а потом удалим лишние буквы, оставив только столько копий слова w, сколько в нём букв;

- подчеркнём в первой копии первую букву w', во второй – вторую, ..., в последней — последнюю.

- много раз повторям такую операцию: удаляем все буквы из начала до подчёркнутой, циклически сдвигаем подчёркнутую букву в конец.

Тогда в конце останутся только подчёркнутые буквы, притом в том порядке, в котором они шли исходно, т.е. останется слово w'.

5. На плоскости нарисована замкнутая 222-звенная ломаная. Известно, что два соседних звена ломаной перпендикулярны друг другу, а также никакие два звена ломаной не лежат на одной прямой. Какое наибольшее количество точек самопересечений может иметь такая ломаная?

Ответ. 6049.

Решение. Для начала докажем, что больше 6049 самопересечений быть не может. Назовём звенья одного направления *горизонтальными*, а звенья второго направления — *вертикальными*. Расположим плоскость так, чтобы горизонтальные звенья действительно стали горизонтальными. Заметим сразу две вещи:

- каждая точка самопересечения — это пересечение вертикального и горизонтального звена;

- горизонтальные и вертикальные звенья чередуются, поэтому каждых по 111 штук.

Пронумеруем сверху вниз горизонтальные звенья от 1 до 111. Посмотрим на звено с номером k. Каждое пересекающее его вертикальное ребро должно иметь над ним конец, совпадающий с концов некоторого горизонтального ребра. Горизонтальных рёбер выше всего $k-1$, поэтому на k-м ребре не более $2(k-1)$ точек самопересечений. Эта оценка хорошо работает для k от 1 до 55: на них суммарно не более

$$0 + 2 + 4 + \ldots + 2 \cdot 54 = 2970$$

точек самопересечений. Аналогичными рассуждениями (но рассматривая нижние концы вертикальных звеней) доказывается, что и на звеньях с 57 по 111 суммарно не более 2970 точек самопересечений.

Для ребра с номером 56 немного улучшим оценку: всего существует 111 вертикальных рёбер, но 2 из них выходят из концов 56-го звена, поэтому не могут его пересекать. Итого, на 56 звене не более 109 точек самопересечений. Значит, суммарно их не больше $2 \cdot 2970 + 109 = 6049$

Построим пример, для которого пример сходится с оценкой. Пронумеруем и вертикальные звенья тоже. Пусть

- 1-е вертикальное ребро соединяет 55 и 56 горизонтальные звенья;

- 2-е вертикальное ребро — 54 и 57 горизонтальные звенья;

- 3-е вертикальное ребро — 53 и 58 горизонтальные звенья;

  ...

- 55-е вертикальное ребро — 1 и 110 горизонтальные звенья;

- 56-е вертикальное ребро — 1 и 111 горизонтальные звенья;
- 57-е вертикальное ребро — 2 и 111 горизонтальные звенья;
- 58-е вертикальное ребро — 3 и 110 горизонтальные звенья;
- 59-е вертикальное ребро — 4 и 109 горизонтальные звенья;

  ...
- 111-е вертикальное ребро — 56 и 57 горизонтальные звенья.

Аналогичный пример для 22-звенной ломаной на картинке ниже.