Задача 1.

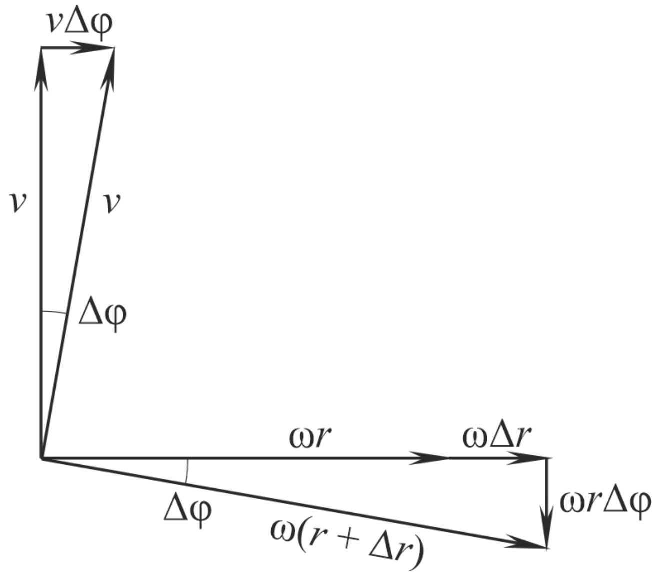
Муравей бежит по вращающейся грампластинке с постоянной (относительно пластинки) скоростью v, направленной по радиусу от центра. Пластинка вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найдите величину полного ускорения муравья относительно Земли в тот момент, когда расстояние от него до центра грампластинки равно r.

Решение.

Скорость муравья относительно Земли w в любой момент равна векторной сумме его скорости относительно грампластинки v и скорости $u = \omega r$, с которой движется относительно Земли точка грампластинки, на которой он находится:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

При этом вектор $\boldsymbol{v}$ направлен по радиусу грампластинки, а вектор $\boldsymbol{u}$ направлен перпендикулярно радиусу. Пусть прошло малое время Δt. За это время пластинка повернется на малый угол $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Найдем изменения каждого векторного слагаемого полной скорости, при этом отдельно будем учитывать вектора изменений, имеющие радиальное и перпендикулярное направления.



Вектор $\boldsymbol{v}$ повернется на угол $\Delta\varphi$ не изменившись по модулю. Поскольку этот угол мал, вектор изменения $\boldsymbol{v}$ можно считать направленным перпендикулярно радиусу, а его модуль равным $v\Delta\varphi = v\omega\Delta t$ (см. рисунок). Вектор $\boldsymbol{u}$ также повернется на угол $\Delta\varphi$, но при этом увеличится по модулю, поскольку расстояние от муравья до центра пластинки возрастет на $\Delta r = v\Delta t$. Поэтому изменение этого вектора состоит из радиальной (направленной к центру) составляющей, по модулю равной $u\Delta\varphi = \omega^2 r\Delta t$, и составляющей, перпендикулярной радиусу, модуль которой равен $\omega\Delta r = \omega v\Delta t$. Собрав вместе слагаемые по каждому направлению, получаем, что радиальная и перпендикулярная составляющие изменения полной скорости равны

$$\Delta w_r = \omega^2 r\Delta t$$

$$\Delta w_\perp = 2\omega v\Delta t$$

Разделив эти приращения на Δt получаем две составляющие ускорения муравья в системе отсчета Земли:

$$a_r = \omega^2 r$$

$$a_\perp = 2\omega v$$

Первая из них — центростремительное ускорение точки пластинки, в которой находится муравей. Вторая называется Кориолисовым ускорением. Модуль полного ускорения по теореме Пифагора равен

$$a = \sqrt{\omega^4 r^2 + 4\omega^2 v^2}$$

Критерии проверки

2 балла — рассмотрение тангенциальной и нормальной составляющих ускорения.

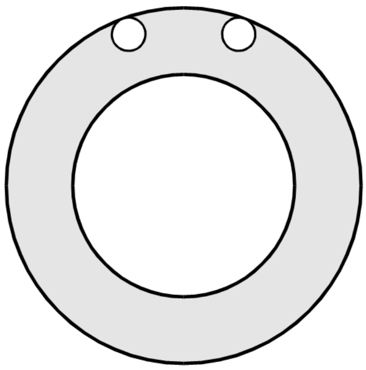
3 балла — по 1 баллу дается за каждый из трех верно найденных векторов поворота касательной и нормальной скоростей.

1 балл — верный ответ.

Всего: 6 баллов

Задача 2.

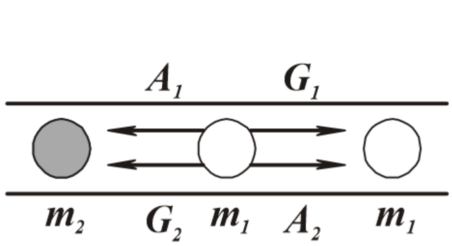
а) Топливный бак орбитальной космической станции имеет форму тора, ось которого совпадает с осью симметрии всей станции. При заполнении его горючим в нем осталось два одинаковых пузырька воздуха. Как будут двигаться эти пузырьки — будут ли они сближаться или удаляться друг от друга? Жидкость в баке покоится, станция находится в невесомости.



б) Тот же вопрос, если в баке остались пузырек воздуха и такого же размера металлический шарик (его плотность больше, чем плотность топлива).

Решение.

а) Любое массивное тело создает в баке два силовых поля — гравитационное и поле сил давления жидкости (архимедовых сил). Второе из них в силу равновесия является «обращенным» полем сил тяжести, действующих на вытесняемые телами элементы жидкости. Для выяснения направления силы, действующей в первом случае на левый, например, пузырек, выделим слева от него шарик жидкости, симметричный правому пузырьку. Вся остальная жидкость (и вся орбитальная станция) в силу симметрии не действует на выделенный

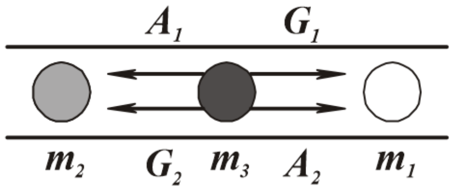


пузырек никакой касательной к тору силой. Силы (гравитационные G_i и архимедовы A_j), действующие на пузырек, показаны на рисунке. Каждая из этих сил пропорциональна произведению соответствующих масс. Обозначим через m_1 массу воздуха в пузырьке, а через m_2 массу шарика жидкости. Тогда сила гравитационного притяжения к правому пузырьку будет равна $G_1 = km_1^2$, сила притяжения к шарику жидкости $G_2 = km_1m_2$, сила Архимеда, возникающая из-за гравитации правого пузырька $A_1 = km_1m_2$ (она равна «весу» вытесненной пузырьком жидкости), сила Архимеда, возникающая из-за гравитации шарика жидкости $A_1 = km_2^2$. Коэффициент k равен гравитационной постоянной, деленной на квадрат расстояния между центрами пузырьков, для всех сил он один и тот же. Тогда для проекции полной силы (положительное направление — вправо) имеем

$$F = k(m_1^2 + m_2^2 - m_1m_2 - m_1m_2) = k(m_1 - m_2)^2 > 0$$

т.е. на левый пузырек действует сила, направленная вправо. На правый пузырек, очевидно, будет действовать влево. Пузырьки будут сближаться.

б) Аналогично во втором случае для сил, действующих на металлический шарик массы m_3, имеем



$$F = k(m_1m_3 + m_2^2 - m_1m_2 - m_3m_2) = k(m_2 - m_1)(m_2 - m_3) < 0$$

поскольку $m_1 < m_2 < m_3$. Таким образом, металлический шарик «отталкивается» от пузырька. Рассмотрев силы, действующие в этом случае на пузырек, легко убедиться, что для него получается точно такая же сила «отталкивания». Шарик и пузырек будут удаляться друг от друга.

Критерии проверки

Пункт а:

3 балла — взятие в решении шарика воды, симметричного относительно шарика воздуха.

2 балла — верное рассмотрение сил Архимеда и гравитационных сил одновременно.

2 балла — верные соотношения для сил и верный ответ в пункте а.

Пункт б:

2 балла — получение подобным *пункту а* способом верного ответа в пункте б.

Всего: 9 баллов

Задача 3.

Вследствие различных атмосферных процессов земной шар обладает отрицательным электрическим зарядом. Он создает у поверхности Земли вертикальное электрическое поле, средняя напряженность которого $E_0 \approx 130$ В/м. Это поле приводит к тому, что на поверхности любого проводящего тела (в частности, тела человека) возникают индукционные электрические заряды. Поскольку эти заряды — статические, мы их никак не чувствуем. Однако, когда мы изменяем положение своего тела в пространстве, они перетекают из одних мест в другие, то есть в нашем теле возникают электрические токи.

а) Оцените время, за которое лежащий человек должен вскочить с кровати, чтобы почувствовать удар электрического тока. Минимальный ток, который чувствует человек $I_0 \approx 1$ мА, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ Ф/м.

б) Оцените мышечное усилие, которое должен развить человек, чтобы выполнить подобное упражнение.

Решение.

Индукционные заряды, возникающие на поверхности проводника в электростатическом поле (в частности, на поверхности тела человека в поле Земли) всегда будут такими, чтобы в каждой точке внутри тела их электростатическое поле в точности скомпенсировало внешнее. Если человек лежит, эти заряды возникают на верхней и нижней поверхностях его тела — на груди и на спине. Для оценки будем считать, что эти поверхности — плоскости площадью $S \sim 1\text{м}^2$. Допустим, поверхностные плотности зарядов на этих плоскостях равны σ и $-\sigma$ (полный заряд человеческого тела равен нулю). Тогда каждая из них создает в пространстве между ними поле напряженностью $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$. На самом деле это не совсем правда — ширина этих плоскостей порядка 0,5 м, а расстояние между ними порядка 0,3 м, их поля в таком случае заметно отличаются от поля бесконечной плоскости, но для оценки этим можно пренебречь. Поля эти направлены в одну сторону, поэтому напряженность суммарного поля будет вдвое больше поля одной плоскости. Это суммарное поле и должно скомпенсировать электрическое поле Земли, поэтому $\sigma/\varepsilon_0 \sim E_0$, откуда $\sigma \sim \varepsilon_0 E_0$. Заряд каждой из этих поверхностей человеческого тела тогда $q \sim \sigma S \sim \varepsilon_0 E_0 S$. Эти заряды и перетекают в другие места тела, когда человек принимает вертикальное положение. Значит, для того, чтобы при этом возникал минимальный ощутимый ток I_0, человек должен вскочить с кровати за время

$$\tau \sim \frac{q}{I_0} \sim \frac{\varepsilon_0 E_0 S}{I_0}$$

Подставив численные данные, получаем $\tau \sim 10^{-6}$ с. Разумеется, вскочить с кровати за одну микросекунду — абсолютно нереалистичная задача.

б) Чтобы лишний раз в этом убедиться, оценим мышечное усилие, которое для этого должен развить человек. Расстояние, на которое при вставании перемещаются части его тела (например, ноги) $l \sim 1$ м. Скорость, с которой они должны двигаться $v \sim l/\tau \sim 10^6$ м/с. Мышцы человека должны за время τ разогнать их до этой скорости, а затем затормозить. Поэтому их ускорение можно оценить как $a \sim v/\tau \sim 10^{12}$ м/с^2 . Считая массу этих частей тела $m \sim 10$ кг, для необходимой силы по второму закону Ньютона получаем оценку:

$$F = ma \sim 10^{13}\text{Н}$$

Человеческие мышцы даже близко не способны к таким усилиям. Более того, эта сила на несколько порядков превышает предел прочности сухожилий и костей человека.

Критерии проверки

Пункт а:

2 балла — представление о возникновении индукционных зарядов, качественное представление о смене зарядов при изменении положения тела и протекании тока.

2 балла — описание модели двух заряженных плоскостей.

1 балл — верная оценка времени.

Пункт б:

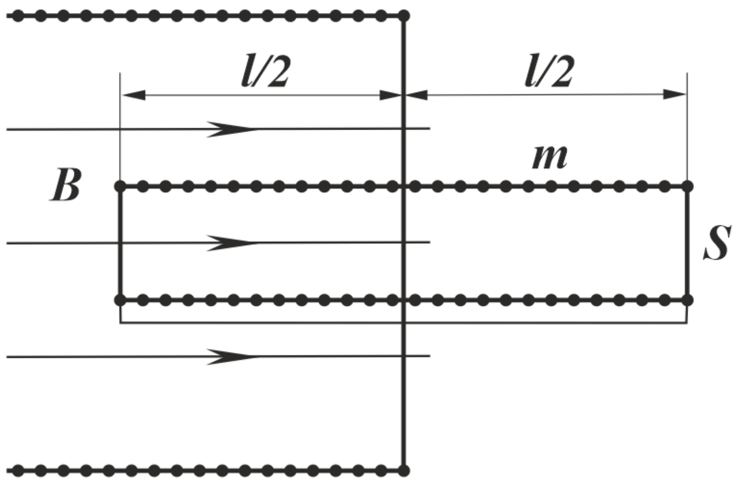
2 балла — верная оценка силы по второму закону Ньютона.

Всего: 7 баллов

Задача 4.

По длинному прямому соленоиду течет ток, создающий внутри него магнитное поле индукции B. Второй соленоид — сверхпроводящий и короткозамкнутый. Его длина l, площадь поперечного сечения S, масса m, его толщина меньше, чем толщина первого соленоида. Вначале он находится далеко от первого соленоида и ток в нем равен нулю. Его подносят к первому соленоиду и вставляют в него так, как показано на рисунке. При этом в нем возникает сверхпроводящий ток, из-за которого соленоиды начинают отталкиваться (как два магнита, обращенные друг к другу одноименными полюсами). Малый соленоид отпускают без начальной скорости. Никакие силы, кроме магнитных, на него не действуют. Найдите скорость, которую он приобретет, удалившись от первого соленоида на большое расстояние.

Первый соленоид закреплен, ток в нем поддерживают постоянным. Толщина обоих соленоидов мала по сравнению с длиной l.

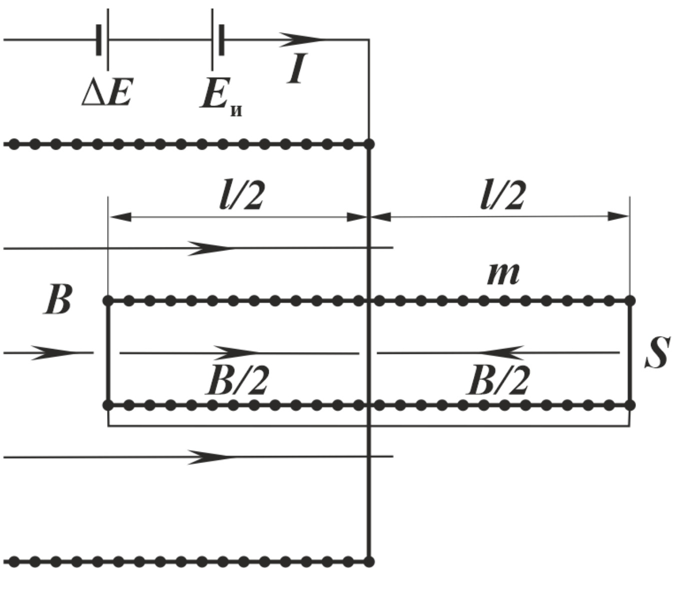


Для справки. Индукция магнитного поля, создаваемого длинным соленоидом, равна $B = \mu_0 In$, где μ_0 — магнитная постоянная, I — сила тока в соленоиде, n — плотность намотки (число витков на единицу длины соленоида).

Решение.

Магнитный поток через сверхпроводящий контур не может изменяться — любое изменение потока приведет к возникновению в нем ЭДС индукции, а поскольку его сопротивление равно нулю, в нем должен будет потечь бесконечно большой ток. Попытка изменить магнитный поток приводит к тому, что в таком контуре возникает сверхпроводящий ток, магнитное поле которого в точности компенсирует изменение потока.

Ровно это и произойдет со сверхпроводящим короткозамкнутым соленоидом, когда его наполовину вставят в большой соленоид. Легко видеть, что для сохранения магнитного потока в такой ситуации малый соленоид должен создать магнитное поле индукции $B/2$, направленное против поля большого соленоида. Тогда через половину его витков будет протекать магнитный поток поля $B/2$, направленного вправо (см. рисунок), а через



вторую половину — поля $B/2$, направленного влево. Полный магнитный поток, таким образом, будет равен нулю, как и вначале, когда малый соленоид находился на большом расстоянии от большого.

Скорость, которую малый соленоид приобретет, когда его отпустят, найдем из закона сохранения энергии. Энергию системы будем искать как энергию ее магнитного поля. Как известно, объемная плотность энергии магнитного поля равна $B^2/(2\mu_0)$. При вылете малого соленоида поле изменяется только в области пространства, которую он занимал в начале этого процесса. Поскольку плотность энергии поля зависит только от модуля магнитной индукции, начальная энергия этой области равна

$$W_1 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{B}{2}\right)^2 Sl = \frac{1}{8\mu_0}B^2 Sl$$

Краевыми эффектами можно пренебречь, потому что толщина обоих соленоидов мала по сравнению с длиной l. Когда малый соленоид удалится на большое расстояние, ток в нем упадет до нуля, как и его магнитное поле, потому что магнитный поток через него должен по-прежнему быть равен нулю. Магнитной энергии у него не будет, а энергия объема, который он занимал вначале, станет равна

$$W_2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 S\frac{l}{2} = \frac{1}{4\mu_0}B^2 Sl$$

(в одной половине этого объема магнитное поле упадет до нуля, а в другой — возрастет до B).

Теперь заметим, что при вылете малого соленоида магнитный поток через большой соленоид возрастает. Значит, в нем возникает ЭДС индукции $E_и$, направленная (по правилу Ленца) против тока (см. рисунок). Для того, чтобы ток в большом соленоиде оставался постоянным, ЭДС питающего его источника должна быть увеличена на компенсирующую величину $\Delta E = E_и$. Эта компенсирующая ЭДС совершит положительную работу над протекающими зарядами, которую нужно учесть в законе сохранения энергии. Основная, постоянная часть ЭДС источника питания, разумеется, тоже совершает работу, но ее работа полностью уходит на выделение тепла в соленоиде и к интересующим нас энергетическим превращениям отношения не имеет — в отличие от работы компенсирующей ЭДС.

Разобьем все время вылета малого соленоида на малые промежутки Δt_i. За один такой промежуток через компенсирующую ЭДС протекает заряд, равный

$$\Delta q_i = I\Delta t_i,$$

где I — сила тока через большой соленоид. Если за это время магнитный поток через соленоид изменился на $\Delta\Phi_i$, то величина компенсирующей ЭДС равна

$$\Delta E_i = E_и = \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t_i}$$

а ее работа за это время

$$\Delta A_i = \Delta q_i \Delta E_i = I \Delta t_i \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t_i} = I \Delta \Phi_i$$

Полная работа этой ЭДС

$$A = \sum_i \Delta A_i = I \sum_i \Delta \Phi_i = I \Delta \Phi$$

Как видим, эта работа равна произведению силы тока на полное изменение магнитного потока $\Delta\Phi$. Изменение магнитного потока через один виток большого соленоида равно $(B/2)S$, причем произойдет оно только в тех витках, которые укладываются на длине $l/2$ — магнитный поток через остальные витки не изменится (краевыми эффектами мы пренебрегаем). Если плотность намотки большого соленоида равна n, то число витков, через которые изменится магнитный поток, равно $N = n(l/2)$. Полное изменение потока через соленоид тогда

$$\Delta \Phi = N \frac{B}{2} S = \frac{1}{4} nBSl$$

С помощью формулы, приведенной в условии задачи, выразим ток в соленоиде через индукцию поля в нем и плотность намотки:

$$I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

Подставив выражения для $\Delta\Phi$ и I в формулу полной работы компенсирующей ЭДС, получаем:

$$A = I \Delta \Phi = \frac{1}{4\mu_0} B^2 Sl$$

Закон сохранения энергии для рассматриваемого нами процесса имеет вид:

$$W_1 + A = W_2 + \frac{mv^2}{2}$$

Последнее слагаемое — кинетическая энергия малого соленоида на большом удалении. Подставив в это уравнение вычисленные выше величины, находим эту кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{8\mu_0} B^2 Sl$$

и скорость малого соленоида

$$v = \sqrt{\frac{B^2Sl}{4\mu_0 m}}$$

Критерии проверки

2 балла — закон сохранения магнитного потока через сверхпроводник.

1 балл — математическая реализация закона сохранения магнитного потока.

2 балла — верное вычисление энергии магнитного поля.

3 балла — упоминание идеи про компенсаторную ЭДС в контуре.

4 балла — верное вычисление работы.

2 балла — верная запись закона сохранения энергии и получение ответа.

Всего: 14 баллов

Задача 5.

В планетарной модели атома, предложенной Резерфордом в 1911 году, электроны движутся по орбитам вокруг атомного ядра, удерживаемые силой электрического притяжения к нему. От этой модели физикам пришлось почти сразу отказаться — она оказалась совершенно нереалистичной. Электрон, находящийся на круговой орбите, движется с центростремительным ускорением, а любой ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитную волну. Оценки показали, что такой электрон должен за ничтожные доли секунды излучить всю свою энергию и упасть на ядро.

Однако Земля, двигаясь вокруг Солнца, тоже излучает. Правда, не электромагнитную, а гравитационную волну. Но никакого влияния этого излучения на орбиту Земли не наблюдается. Небольшие деформации этой орбиты происходят из-за притяжения других планет Солнечной системы, а уменьшение ее радиуса из-за потерь энергии на излучение астрономы даже не обсуждают.

С чем связано такое различие? Сделайте численные оценки, из которых будет видно, что радиационные (излучательные) потери для электрона в атоме имеют критически большое значение, а для Земли ничтожно малы.

Для справки. Интенсивность электромагнитного излучения (энергия, излучаемая в единицу времени) заряда q, движущегося по окружности, равна

$$I_{\text{эм}} = \frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

где a — центростремительное ускорение заряда, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная, $c = 3 \times 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Заряд электрона $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг, радиус его орбиты в атоме $r \sim 10^{-10}$ м.

Интенсивность гравитационного излучения планеты массы m, обращающейся вокруг звезды массы M ($M >> m$) по круговой орбите радиуса R, равна

$$I_{\text{гр}} = \frac{32}{5}\frac{G^4 m^2 M^3}{c^5 R^5}$$

где $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2 — гравитационная постоянная, c — скорость света в вакууме. Масса Земли $m = 6{,}0 \times 10^{24}$ кг, масса Солнца $M = 2{,}0 \times 10^{30}$ кг, среднее расстояние от Земли до Солнца $R = 1{,}5 \times 10^{11}$ м.

Решение.

Оценим время, за которое радиус орбиты электрона в атоме водорода из-за излучения электромагнитной волны уменьшится, например, в два раза. Для удобства вычислений введем обозначение:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Потенциальная энергия электрона, находящегося на круговой орбите радиуса r, равна

$$E_{\text{п}} = -k\frac{e^2}{r}$$

Его кинетическую энергию найдем, записав для него Второй закон Ньютона:

$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}$$

Отсюда находим:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = k\frac{e^2}{2r}$$

Полная энергия электрона тогда равна

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = -k\frac{e^2}{2r}$$

Отсюда видно, что, когда радиус орбиты станет $r/2$, полная энергия будет равна

$$E' = -k\frac{e^2}{r}$$

Переходя на новую орбиту, электрон теряет энергию

$$\Delta E = E - E' = k\frac{e^2}{2r}$$

Центростремительное ускорение электрона найдем из Второго закона Ньютона:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{k}{m}\frac{e^2}{r^2}$$

Интенсивность его электромагнитного излучения равна

$$I_{\text{эм}} = \frac{e^2a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{2}{3}\frac{k^3e^6}{c^3m^2r^4}$$

Мы рассматриваем не очень сильное уменьшение радиуса орбиты (всего вдвое), поэтому для оценки пренебрежем изменением интенсивности излучения при изменении радиуса. Тогда для времени, за которое будет излучена энергия ΔE, получаем оценку:

$$\tau_{\text{эм}} \sim \frac{\Delta E}{I_{\text{эм}}} = \frac{3}{4}\frac{c^3m^2r^3}{k^2e^4} \sim 3\times 10^{-10}\ \text{с}$$

Как видим, излучение электромагнитной волны должно привести к весьма существенному изменению орбиты электрона за очень малое время. При этом известно, что атом водорода устойчив — если не оказывать на него внешних воздействий, с ним ровно ничего не происходит даже за время, на много порядков превосходящее найденное нами $\tau_{\text{эм}}$. Эта проблема стала одной из причин возникновения квантовой теории.

Теперь оценим время, за которое излучение гравитационных волн должно привести к уменьшению в два раза радиуса орбиты Земли. Вычисления совершенно аналогичны. Потенциальная энергия взаимодействия Земли с Солнцем равна

$$E_{\text{п}} = -G\frac{mM}{R}$$

Ее кинетическая энергия с помощью Второго закона Ньютона может быть приведена к виду

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2}G\frac{mM}{R}$$

Ее полная энергия

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{R}$$

Эта энергия при уменьшении радиуса орбиты вдвое уменьшается на

$$\Delta E = E - E' = \frac{1}{2} G \frac{mM}{R}$$

Интенсивность излучения гравитационных волн

$$I_{\text{гр}} = \frac{32}{5} \frac{G^4 m^2 M^3}{c^5 R^5}$$

Пренебрегая зависимостью этой интенсивности от радиуса орбиты, для интересующего нас времени получаем оценку:

$$\tau_{\text{гр}} \sim \frac{\Delta E}{I_{\text{гр}}} = \frac{5}{64} \frac{c^5 R^4}{G^3 m M^2} \sim 10^{31} \text{ с} \approx 3 \times 10^{23} \text{ лет}$$

.

Это время на 13 порядков превосходит возраст Вселенной (14 млрд лет)! Отсюда понятно, что даже за все время существования Солнечной системы гравитационное излучение Земли не могло заметно изменить ее орбиту. Гравитационное излучение планет слишком слабо для этого. Однако для компактных двойных звездных систем (в которых каждый компонент — звезда очень маленького размера и расстояние между ними очень мало) излучение гравитационных волн приводит к весьма существенным потерям энергии. Например, размер орбиты двойного пульсара PSR J0737-3039, как показали очень точные астрономические измерения, уменьшается приблизительно на 2,5 метра за год, и именно такой темп сближения предсказывают вычисленные потери энергии на гравитационное излучение этой системы!

Критерии проверки

Пункт а (электромагнитное излучение):

2 балла – запись энергии электрона в поле ядра атома и нахождение интенсивности.

1 балл – верный расчет времени (оценка).

Пункт б (гравитационное излучение):

2 балла – запись энергии гравитационного поля и нахождение интенсивности.

1 балл – верный расчет времени излучения(оценка).

Всего: 6 баллов