Задание 1.

Действительные числа x и y таковы, что

$$x + \frac{5}{y} = y + \frac{3}{x} = 23.$$

Какое наибольшее значение может принимать произведение xy?

Ответ. $\frac{521+\sqrt{271\,381}}{2}$.

Решение. По условию, $xy + 5 = 23y$, $xy + 3 = 23x$. Тогда $(xy + 5)(xy + 3) = 23^2 xy$, откуда

$$(xy)^2 - 521(xy) + 15 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно xy, наибольший корень которого равняется

$$\frac{521 + \sqrt{521^2 - 60}}{2} = \frac{521 + \sqrt{271\,381}}{2}$$

Подходящие значения x и y можно найти из равенств $xy + 5 = 23y$, $xy + 3 = 23x$, т.е. xy действительно может быть таким.

Задание 2.

Арифметическая прогрессия a_1, a_2, $\ldots$ задана первыми двумя членами: $a_1 = 381$, $a_2 = 406$. Определим последовательность b_k следующим образом: $b_1 = a_1 = 381$, $b_{k+1} = b_k \cdot a_{k+1}$ для каждого $k \geqslant 1$. Тогда $b_2 = 381 \cdot 406 = 154\,686$. В записи этого числа используется 5 различных цифр: 1, 4, 5, 6 и 8. А какое наименьшее количество различных цифр может использоваться в записи числа b_k для натурального k?

Ответ. 2.

Решение. Не испугаемся и найдём значение b_3. Для этого $b_2 = 154\,686$ необходимо умножить на $a_3 = a_2 + (a_2 - a_1) = 431$. Получится $b_3 = 66\,669\,666$. В записи этого числа всего 2 цифры.

Докажем теперь, что всего одна цифра в записи b_k быть не может. Для b_1, b_2 и b_3 это уже известно. Заметим, что a_4 — чётное число, поэтому b_4 и все следующие b_k будут делится на 4. Кроме того, каждое из a_k оканчивается или на 1, или на 6. Поэтому все b_k при $k \geqslant 4$ будут оканчиваться на 6. Получается, если в записи b_k, $k \geqslant 4$, будет всего одна цифра, то это цифра 6. Тогда последние две цифры b_k это 66, т.е. b_k не делится на 4, противоречие.

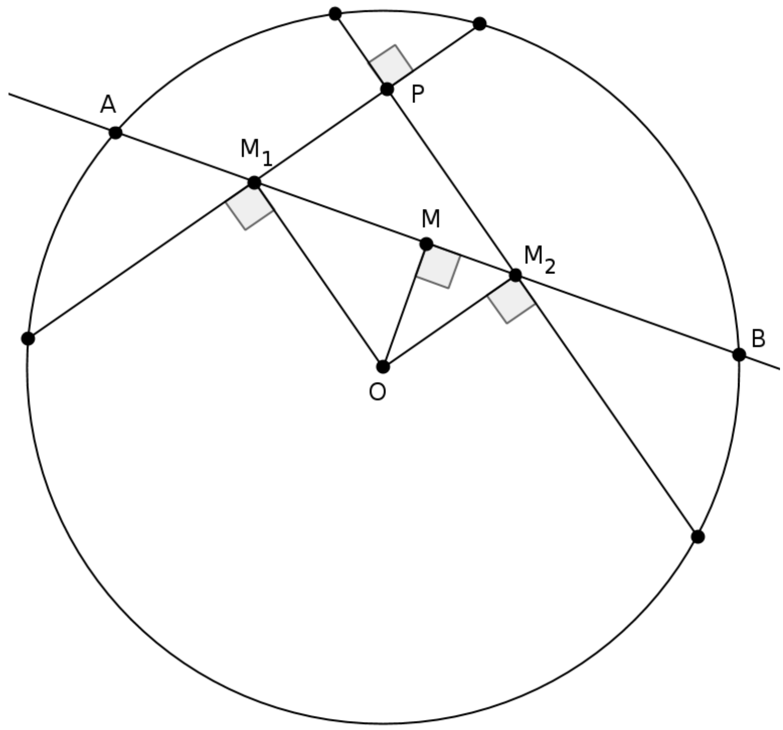
Задание 3.

Внутри окружности ω проведены две перпендикулярные хорды, пересекающиеся в точке P; точки M_1 и M_2 — их середины. Прямая M_1M_2 пересекает

ω в точках A и B, причём M_1 лежит между A и M_2. Какие значения может принимать разность $BM_2 - AM_1$, если $PM_1 = 15$, $PM_2 = 20$?

Ответ. Только 7.

Решение. Пусть O — центр окружности, M — середина отрезка AB. Поскольку отрезок, соединяющий центр окружности с серединой хорды перпендикулярен этой хорде, $\angle OM_1P = \angle OM_2P = \angle OMA = 90°$ (см. чертёж).



Заметим, что $BM_2 - AM_1 = (BM - MM_2) - (AM - MM_1) = MM_1 - MM_2$, т.к. $AM = BM$.

Далее, в четырёхугольнике OM_1PM_2 три угла прямые, т.е. этот четырёхугольник — прямоугольник, $OM_1 = PM_2 = 20$, $OM_2 = PM_1 = 15$, $\angle M_1OM_2 = 90°$. Тогда в прямоугольном треугольнике OM_1M_2 проведена высота OM на гипотенузу. Несложно посчитать, что тогда $MM_1 = 16$, $MM_2 = 9$, откуда $MM_1 - MM_2 = 7$.

Задание 4.

Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 2023$. Докажите, что

$$a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot \sqrt{a_2} + a_3 \cdot \sqrt[3]{a_3} + \ldots + a_n \sqrt[n]{a_n} > 1000.$$

Решение. Разобьём все a_i на две группы: в группу A отправим все числа, для которых $a_i < \frac{1}{2^i}$, в группу B — числа, для которых $a_i \geqslant \frac{1}{2^i}$. Сумма чисел в группе A меньше $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1$, поэтому сумма чисел в группе B хотя бы 2022. Для каждого числа a_i из группы B оценим соответствующее ему слагаемое $a_i\sqrt[i]{a_i} > \frac{1}{2}a_i$. Значит, во второй сумме только слагаемые из B вносят уже хотя бы половину от своей суммы, т.е. хотя бы 1011. Следовательно, и вся сумма большое 1000.

Задание 5.

Авантюрист прибыл на остров, где живёт племя аборигенов, и пытается понять их язык. На данный момент ему известно следующее:

1. в языке всего две буквы A и B, каждая последовательность букв образует слово, у которого есть некоторое значение;

2. несмотря на то, что слов бесконечно много, значений у слов конечное количество;

Авантюрист придумал обозначение для слов, имеющих одинаковое значение: он стал писать между ними знак равенства «=».

3. если $w_1 = w_2$, то для любых слов s и t выполнены равенства $sw_1t = sw_2t$, $sw_1 = sw_2$, $w_1t = w_2t$ (для слов x и y под xy понимается слово, полученное приписыванием к слову x справа слова y); другими словами, если в некотором слове заменить его подслово на слово с тем же значением, то значение слова от этого не изменится.

Докажите, что если $ABB = B$, то $BAB = B$.

Решение. Поскольку различных значений у слов конечное количество, то среди слов B, BB, $\ldots$ найдутся два с одинаковым значением. Пусть это слова из n и m букв B:

$$\underbrace{BB\ldots B}_{n} = \underbrace{BB\ldots B}_{m},$$

где $n < m$. Если $n \geqslant 2$, то

$$\underbrace{BB\ldots B}_{n-1} = B\underbrace{BB\ldots B}_{n-2} = ABB\underbrace{BB\ldots B}_{n-2} = A\underbrace{BB\ldots B}_{n} = A\underbrace{BB\ldots B}_{m} =$$

$$ABB\underbrace{BB\ldots B}_{m-2} = B\underbrace{BB\ldots B}_{m-2} = \underbrace{BB\ldots B}_{m-1},$$

т.е. одинаковые значения имеют слова из $n-1$ и $m-1$ букв B. Продолжая таким образом, мы придём к тому, что слово B имеет то же значение, что и слово из $k = n - m + 1 \geqslant 2$ букв B. Тогда

$$BAB = BA\underbrace{BB\ldots B}_{k} = BABB\underbrace{BB\ldots B}_{k-2} = BB\underbrace{BB\ldots B}_{k-2} = \underbrace{BB\ldots B}_{k} = B,$$

что и требовалось доказать.