Задание 1.

Действительные числа x и y таковы, что

$$x+\frac{5}{y}=y+\frac{3}{x}=23.$$

Какое наибольшее значение может принимать произведение xy?

Задание 2.

Арифметическая прогрессия a_1, a_2, … задана первыми двумя членами: $a_1=381$, $a_2=406$. Определим последовательность b_k следующим образом: $b_1=a_1=381$, $b_{k+1}=b_k\cdot a_{k+1}$ для каждого $k\geqslant 1$. Тогда $b_2=381\cdot 406=154\,686$. В записи этого числа используется 5 различных цифр: 1, 4, 5, 6 и 8. А какое наименьшее количество различных цифр может использоваться в записи числа b_k для натурального k?

Задание 3.

Внутри окружности ω проведены две перпендикулярные хорды, пересекающиеся в точке P; точки M_1 и M_2 — их середины. Прямая M_1M_2 пересекает ω в точках A и B, причём M_1 лежит между A и M_2. Какие значения может принимать разность BM_2-AM_1, если $PM_1=15$, $PM_2=20$?

Задание 4.

Положительные числа a_1, a_2, …, a_n таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_n>2023$. Докажите, что

$$a_1\cdot a_1+a_2\cdot\sqrt{a_2}+a_3\cdot\sqrt[3]{a_3}+\ldots+a_n\sqrt[n]{a_n}>1000.$$

Задание 5.

Авантюрист прибыл на остров, где живёт племя аборигенов, и пытается понять их язык. На данный момент ему известно следующее:

1. в языке всего две буквы A и B, каждая последовательность букв образует слово, у которого есть некоторое значение;

2. несмотря на то, что слов бесконечно много, значений у слов конечное количество;

Авантюрист придумал обозначение для слов, имеющих одинаковое значение: он стал писать между ними знак равенства «=».

3. если $w_1=w_2$, то для любых слов s и t выполнены равенства $sw_1t=sw_2t$, $sw_1=sw_2$, $w_1t=w_2t$ (для слов x и y под xy понимается слово, полученное приписыванием к слову x справа слова y); другими словами, если в некотором слове заменить его подслово на слово с тем же значением, то значение слова от этого не изменится.

Докажите, что если $ABB=B$, то $BAB=B$.