В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешается), а также, проверяется ли полное решение или достаточно было ввести ответ.

Задача 1. (6; ответ). В очереди под дождём стояли 11 человек, каждый держал зонтик. Они стояли вплотную, то есть зонтики соседей соприкасались (см. рис).

Дождь закончился, люди закрыли зонтики и встали, соблюдая дистанцию в 50 см между соседями. Во сколько раз уменьшилась длина очереди? Людей можно считать точками, а зонтики — кругами радиуса 50 см.

Ответ. В 2,2 раза.

Решение. Длина очереди с зонтиками складывается из 11 диаметров зонтов, то есть из 22 частей-радиусов длины 50 см. Длина очереди без зонтиков – это 10 промежутков между 11 людьми, причём каждый из промежутков также равен 50 см. Значит, длина очереди уменьшилась в $22 : 10 = 2{,}2$ раза.

Задача 2. (6–7; ответ). Из 100 членов Совета Двух Племён часть — эльфы, остальные — гномы. Каждый написал два числа: количество эльфов в Совете и количество гномов в Совете. При этом своих соплеменников каждый посчитал верно, а при подсчёте иноплеменников ошибся ровно на 2. В написанных числах одна цифра встретилась не менее 222 раз. Сколько эльфов и сколько гномов могло быть в Совете? Если вариантов несколько — укажите один из них.

Ответ. Возможные варианты:

- 66 эльфов, 34 гнома (или наоборот — 66 гномов, 34 эльфа);
- 9 эльфов, 91 гном (или наоборот — 9 гномов, 91 эльф).

Комментарий. От участников требовалось найти лишь один пример. Покажем, как найти их все.

Пусть по крайней мере 222 раза написана цифра A. Кто-то написал A хотя бы три раза (иначе цифр A в ответах будет не больше, чем $100 \cdot 2 < 222$). Назовём этого члена Совета Магистром. Числа Магистра в сумме дают либо 102, либо 98. Несложно убедиться, что случаи, когда одно из этих чисел

— 100 или 101, не подходят. Значит, можно считать оба написанных Магистром числа двузначными (если одно из них однозначное, напишем на месте десятков ноль).

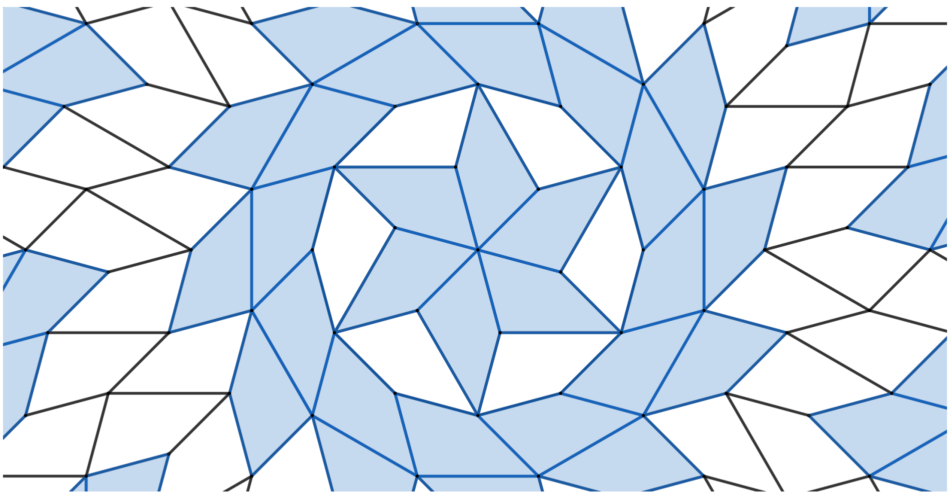
Итак, одно из чисел Магистра — это AA. Если второе начинается на цифру A, то их сумма либо не больше $44+49 < 98$, либо не меньше $55+50 > 102$. Значит, Магистр написал AA и BA. Поскольку сумма этих чисел оканчивается на 2 или на 8, то A может быть равна 1, 6, 4 или 9. Возможны следующие 4 случая:

1. Если $AA = 11$, то $BA = 102 - 11 = 91$;
2. Если $AA = 66$, то $BA = 102 - 66 = 36$;
3. Если $AA = 44$, то $BA = 98 - 44 = 54$;
4. Если $AA = 99$, то $BA = 98 - 99 < 0$ — не подходит.

При $AA = 11, BA = 91$ на самом деле гномов и эльфов (в каком-то порядке) либо 11 и 89, либо 9 и 91. В первом случае 1 названа не более, чем трижды каждым из 11 человек и максимум по разу каждым из 89, то есть всего менее 200 раз. Во втором случае 1 может быть названа трижды каждым из 91 человека и ни разу каждым из 9, то есть всего максимум $91 \cdot 3 = 273$ раза. Этот случай подходит и он даёт два варианта: 9 эльфов и 91 гном, 9 гномов и 91 эльф.

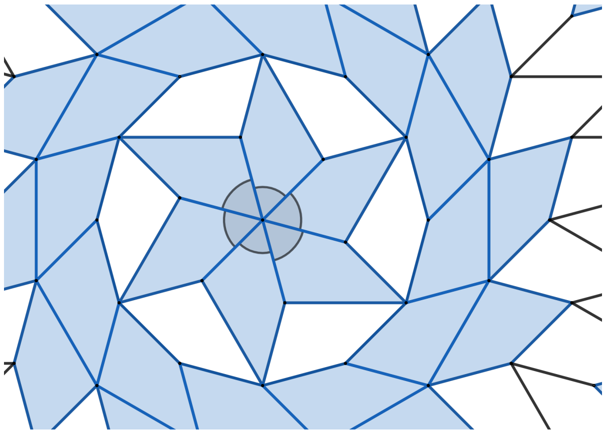
Аналогичные рассуждения показывают, что в случае 2 в совете могло быть 66 эльфов, 34 гнома (или наоборот — 66 гномов, 34 эльфа), а случай 3 не подходит.

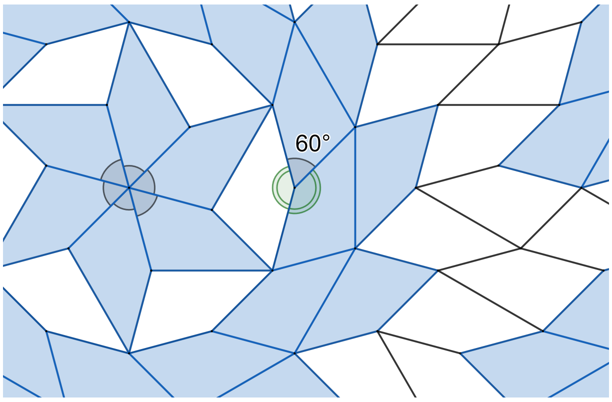
Задача 3. (6–9; ответ). В маленьком доме в Португалии пол выложен из четырёхугольных плиток одинаковой формы и размера (см. рис.). Найдите все четыре угла плитки. Ответ дайте в градусах.



Ответ. 45°, 60°, 105° и 150°.

Решение. В центре мозаики 6 одинаковых углов с общей вершиной образуют полный угол, значит, каждый из них равен $360° : 6 = 60°$.

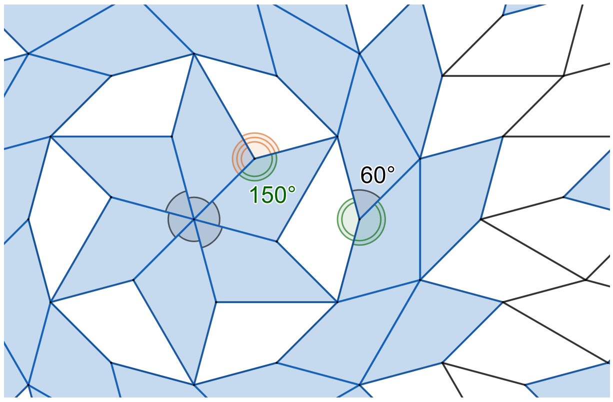


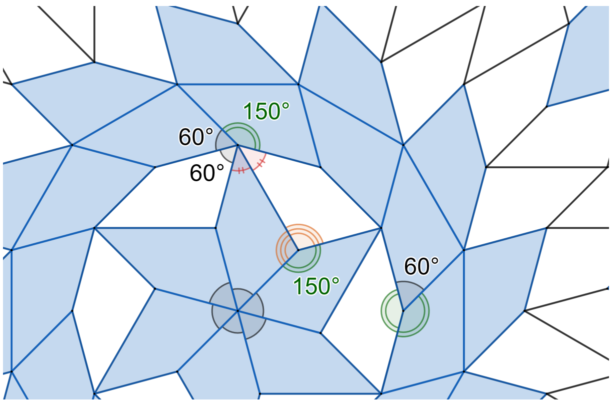


Несколько правее полный угол в 360° складывается из уже известного нам угла 60° и ещё двух равных между собой — следовательно, они составляют по 150°.

Аналогичным образом вычисляется ещё один угол: он равен

$$(360° - 150°) : 2 = 105°.$$

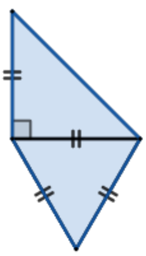




Последний угол плитки можно вычислить либо воспользовавшись тем, что сумма углов четырёхугольника равна 360°, либо же с помощью ещё одной вершины мозаики:

$$(360° - 150° - 2 \cdot 60°) : 2 = 45°.$$

Таким образом, углы плитки равны 45°, 60°, 105° и 150°.



Комментарии. 1) Заметим также, что такую плитку одна из диагоналей делит на равносторонний и прямоугольный равнобедренный треугольники.

2) Разбиение плоскости на многоугольники без дырок и наложений называется *замощением*. Замощения бывают как *периодические* (есть два разных направления, при сдвиге в каждом из которых замощение совмещается само с собой) и *непериодические* (таких сдвигов нет). В задаче приведена часть непериодического замощения плоскости такими четырехугольными плитками, которое придумал Gábor Damásdi. Но такими четырёхугольниками можно замостить плоскость и периодически (придумайте, как — комментарий 1 поможет). А бывает ли многоугольник, которым можно замостить плоскость только непериодически? Это не известно!

Задача 4. (7–8; ответ). Произведение пяти различных целых чисел равно 2022. Чему может равняться их сумма? Если ответов несколько — укажите их все.

Ответ. $338, 336, -332, -342$.

Решение. Разложим 2022 на простые множители: $2022 = 2\cdot 3\cdot 337$, значит, из пяти перемноженных чисел только три могут быть по модулю больше, чем 1. Остальные по модулю обязаны быть равны 1; таких чисел ровно два (1 и -1), следовательно, 2022 получено как $(-1)\cdot 1\cdot(\pm 2)\cdot(\pm 3)\cdot(\pm 337)$. Остаётся заметить, что знак «$-$» должен стоять либо перед одним из чисел 2, 3, 337, либо перед всеми тремя — итого 4 варианта и, соответственно, 4 возможных суммы: $338, 336, -332, -342$.

Задача 5. (7–11; ответ). Казино предлагает игру по таким правилам. Игрок ставит любое целое число долларов (но не больше, чем у него в этот момент есть) либо на орла, либо на решку. Затем подбрасывается монета. Если игрок угадал, как она упадёт, он получает назад свою ставку и столько же денег впридачу. Если не угадал — его ставку забирает казино. Если игроку не повезёт четыре раза подряд, казино присуждает ему в следующей игре утешительную победу вне зависимости от того, как упадёт монета. Джо пришёл в казино со 100 долларами. Он обязался сделать ровно пять ставок и ни разу не ставить больше 17 долларов. Какую наибольшую сумму денег он сможет гарантированно унести из казино после такой игры?

Ответ. 98.

Решение. Главное наблюдение в этой задаче такое: как только игрок один раз угадает, как упадёт монетка — все оставшиеся игры он может не угадать. Поэтому все ставки после победы должны быть по 1 доллару.

Для начала покажем, что уйти, потеряв 1 доллар или меньше, игроку не удастся. Посмотрим, что для этого ему пришлось бы делать.

1. В первый раз игроку придётся поставить не менее 3 долларов, потому что он мог выиграть эту игру и проиграть 4 следующие.
2. Если бы он проиграл в первой игре, то во второй ему бы пришлось поставить не менее 5 долларов: ведь он может выиграть только эту партию, а проиграть минимум 3 доллара на предыдущей и ещё минимум 3 на следующих трёх.

3. Если он проиграл и вторую игру, то на третьей его ставка должна быть уже минимум 9 долларов: если выиграет, то ему надо компенсировать минимум 10 долларов от поражений (3 за первую игру, 5 за вторую, по 1 за четвёртую и пятую).
4. Если он проиграл и третью игру, то на четвёртой ему придётся поставить уже минимум 17 долларов: выигрыш должен компенсировать минимум $3+5+9+1=18$ долларов от поражений.
5. Если он проиграл и четвёртую игру, то он уже проиграл минимум $3+5+9+17=34$ доллара и даже максимальной ставкой в 17 долларов он не сможет компенсировать себе убыток.

Теперь докажем, что игрок может ставить так, чтобы уйти, потеряв всего 2 доллара. Аналогично рассуждениям выше, понимаем, что пока игрок проигрывает, он должен ставить 2, затем 3, 5, 9 и 17 долларов, а как только выиграет — все следующие партии ставить по 1 доллару. Несложно проверить, что в каждой ситуации игрок потеряет не более 2 долларов.

Комментарий. Заметим, что если разрешить игроку ставить *не более 5 раз*, то он может «остаться в плюсе». Для этого ему достаточно ставить 1, 2, 4, 8 и 16 долларов и уходить после того, как он выиграл: тогда он точно выиграет 1 доллар. Доказательство того, что в этом случае нельзя выиграть больше, аналогично доказательству из решения.

Задача 6. (8–11; решение). Коттеджный посёлок имеет размеры $n \times m$ одинаковых квадратных участков. Собственники по очереди начали огораживать свои участки забором. Стоимость части забора между любыми двумя соседними участками составила 10 тысяч рублей и её полностью нёс тот сосед, который огораживал свой участок первым (расходы не делились между соседями, то есть некоторые могли вообще ничего не потратить). В итоге все участки оказались огорожены забором с четырёх сторон. Могло ли оказаться, что в итоге поровну жителей потратило на забор по 0, 10, 30 и 40 тысяч рублей, а остальные — по 20 тысяч?

Ответ. Нет.

Решение 1. Предположим, что описанная в условии ситуация возможна. Пусть по 0, 10, 30 и 40 тысяч рублей потратили по x жителей, а по 20 тысяч — y жителей. Всего жителей тогда $4x+y=mn$.

Суммарно жители потратили на заборы $(0+10+30+40)x+20y=80x+20y$ тысяч рублей. С другой стороны, они построили заборы на каждом отрезке, ограничивающем участки. Посчитаем, сколько всего таких отрезков. Карта посёлка — это таблица $m\times n$ клеток-участков. В каждой из m «строк» этой карты есть по $n+1$ вертикальному отрезку, в каждом из n «столбцов» — по

$m+1$ горизонтальному отрезку. Следовательно, всего отрезков $m(n+1)+n(m+1) = 2mn+m+n$, и на строительство заборов на них жители потратили $20mn + 10m + 10n$ тысяч рублей.

Но полученные два равенства противоречат друг другу:

$$20mn = 20(4x + y) = 80x + 20y = 20mn + 10m + 10n > 20mn.$$

Решение 2. Разобьём часть жителей на пары: того, кто потратил 40 тысяч, поставим в пару с не потратившим ничего, а того, кто потратил 30 тысяч — в пару с потратившим 10. Тогда каждая пара заплатила за заборы 40 тысяч, а все остальные по 20 тысяч — то есть, в среднем каждый житель посёлка заплатил 20 тысяч.

С другой стороны, пусть каждый построит левый и верхний забор своего участка. Тогда каждый уже потратил по 20 тысяч, но правые и нижние заборы по краям посёлка пока ещё не построены (и на них жителям все равно придётся «скинуться»). Поэтому в среднем каждый потратит больше 20 тысяч рублей — противоречие.

Задача 7. (9–11; ответ). Таня взяла список из ста чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$ и вычеркнула несколько из них. Оказалось, что какие бы два числа из оставшихся Таня ни взяла в качестве a и b, уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет хотя бы один действительный корень. Какое наибольшее количество чисел могло остаться не вычеркнутым?

Ответ. 81.

Решение. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = a^2 - 4b$ неотрицателен. Значит, любые два из оставшихся чисел должны удовлетворять неравенству $a^2 \geqslant 4b$.

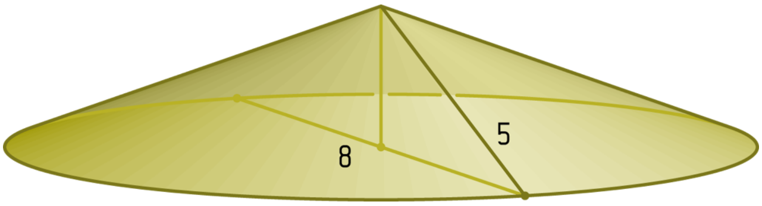
И вот тут самая важная мысль: чем меньше мы возьмём a и чем больше мы возьмём b, тем «сложнее» этому неравенству будет выполняться! Другими словами, если оно выполняется, когда a — наименьшее из чисел, а b — наибольшее, то и для любых пар чисел оно будет выполняться.

Пусть m — наименьшее из выбранных чисел, а M — наибольшее. Мы доказали неравенство $m^2 \geqslant 4M$. Дальше решение можно заканчивать по разному. Покажем один из путей. Если $M = 100$, то $m^2 \geqslant 400$ и $m \geqslant 20$ — таким образом, можно оставить 81 число: от 20 до 100. Докажем, что больше 81 числа оставить нельзя. Действительно, в противном случае $M > m + 80$, $m < 20$ и для уравнения $x^2 + mx + M = 0$

$$D = m^2-4M < m^2-4(m+80) = m^2-4m-320 = (m-2)^2-324 \leqslant 17^2-324 < 0,$$

значит, уравнение не имеет действительных корней. Следовательно, чисел не может быть больше 81 (а 81 число оставить можно: от 20 до 100).

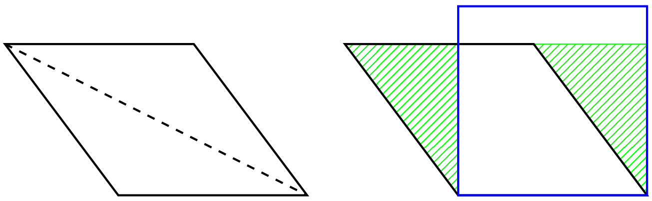
Задача 8. (10–11; ответ). У прямого кругового конуса длина образующей равна 5, а диаметр равен 8.



Найдите наибольшую площадь треугольного сечения, которая может получиться при пересечении конуса плоскостью.

Ответ. 12,5.

Решение. Две из трёх сторон треугольного сечения конуса — это образующие, а треугольник с двумя сторонами 5 имеет максимальную площадь, когда угол между этими сторонами равен 90°. Действительно, если сложить из двух таких треугольников ромб, то легко понять, что его площадь максимальна, когда его угол прямой — см. рисунок:



Осталось доказать, что у нашего конуса есть сечение с прямым углом. Диаметр основания равен 8, поэтому в нём можно найти хорду длины $5\sqrt{2}$ ($\sqrt{2} < 1{,}5$, поэтому $5\sqrt{2} < 7{,}5 < 8$). Проведём сечение через эту хорду и вершину конуса — получится треугольник со сторонами 5, 5, $5\sqrt{2}$. Так как $5^2 + 5^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$, этот треугольник будет прямоугольным (по теореме, обратной теореме Пифагора), а его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$.

Вариант подготовили: А. В. Антропов, А. Д. Блинков, М. А. Евдокимов, Т. В. Казицына, Т. А. Корчемкина, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, М. Ю. Панов, И. В. Раскина, Н. А. Солодовников.