Задание 1.

Действительные числа x и y таковы, что $x(x+1)y = 6$, а $x^3(x^3+1)y^3 = 126$. Какие значения может принимать выражение $x^2(x^2+1)y^2$? Укажите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ: Только 26.

Решение. Возведём первое равенство в куб и поделим на второе:

$$\frac{6^3}{126} = \frac{x^3(x+1)^3y^3}{x^3(x^3+1)y^3},$$

откуда $\frac{12}{7} = \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$, или $5x^2 - 26x + 5 = 0$ (при условии $x \neq 0$, $x \neq -1$, $y \neq 0$). Решая это квадратное уравнение, получаем $x = 5$ или $x = 1/5$. Из первого равенства тогда $y = \frac{6}{5\cdot 6} = \frac{1}{5}$ или $y = \frac{6}{1/5\cdot 6/5} = 25$ соответственно.

Подставляем получившиеся значения в требуемое выражение:

$$5^2 \cdot (5^2+1) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 26 \text{ и } \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1\right) \cdot 25^2 = 26.$$

Задание 2.

У Ярослава есть N замков, пронумерованных числами от 1 до N, расположенных по кругу в порядке увеличения номеров от 1 до N по часовой стрелке. В начальный момент времени все замки открыты. Ярослав начинает с замка с номером 1 и движется всегда по часовой стрелке. Если Ярослав находится у замка с номером k, то:

– если открытых замков сейчас суммарно больше k, то Ярослав закрывает следующие по часовой стрелке k открытых замков, и переходит к следующему после этого открытому замку (возможно, снова к замку с номером k);

– если открытых замков сейчас суммарно не больше k, то Ярослав закрывает все замки, кроме замка с номером k, и заканчивает (таким образом, остаётся открытым только замок с номером k).

При каком наименьшем $N > 2022$ Ярослав оставит в конце открытым замок с номером 1?

Ответ: 2046.

Решение. Легко видеть, что Ярослав будет находится вначале у замка 1, потом — 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023.

Если $N < 2046$, то следующим действием Ярослав закроет замки с номерами 1024, 1025, $\ldots$, N, 1 и, возможно, ещё какие-то. В любом случае, замок под номером 1 останется закрытым.

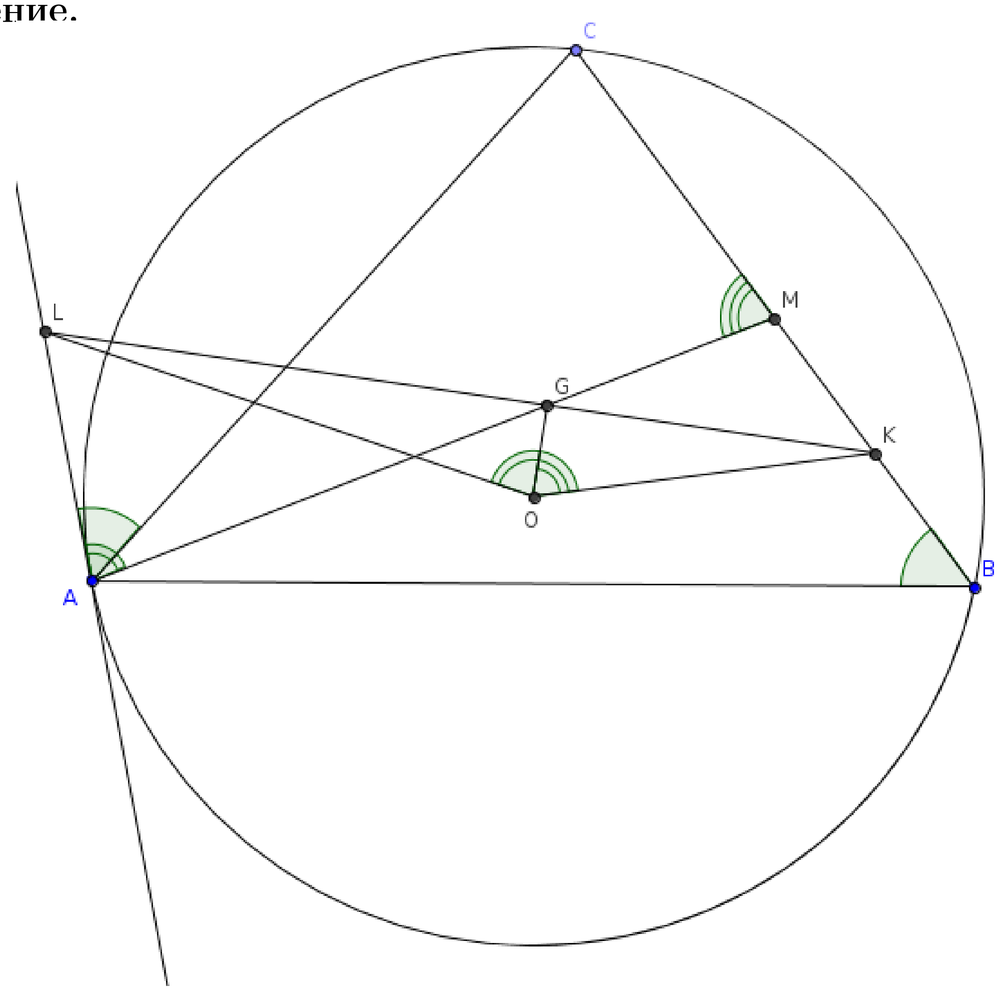
Если $N = 2046$, то дальше Ярослав закроет все замки с номерами от 1024 до 2046 и вновь встанет у замка с номером 1. Сейчас открыты замки 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023. Дальше Ярослав закрывает замок 3 и переходит к замку 7, потом закрывает замки 15, 31, …, 1023, и переходит к замку 1, который и оставляет открытым.

Задание 3.

Пусть O — центр описанной окружности, G — точка пересечения медиан остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная OG, проходящая через точку G, пересекает отрезок BC в точке K. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую KG в точке L. Найдите величину угла $\angle ACB$, если $\angle LOK = 155°$, а $\angle ABC = 53°$.

Ответ: $78°$

Решение.



Пусть M — середина стороны BC; поскольку AM — медиана, то точки G лежит на AM.

- четырёхугольник $OGMK$ — вписанный, так как $\angle OGK = 90° = \angle OMK$ (первое равенство по условию, второе следует из того, что OM — серединный перпендикуляр к BC), откуда $\angle GOK = 180° - \angle GMK = \angle GMC$.

- четырёхугольник $OGLA$ — вписанный, так как $\angle OGL = 90^\circ = \angle OAL$ (первое равенство по условию, второе следует из того, что OA — радиус, а AL — касательная к описанной окружности треугольника ABC), откуда $\angle GOL = \angle GAL$.
- $\angle LAC = \angle ABC$, так как угол между хордой и касательной равен вписанному углу, если они стягивают одну и ту же дугу.

Значит,

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle CAM + \angle CMA) = 180^\circ - (\angle LAM + \angle CMA - \angle LAC) = 180^\circ - (\angle LOG + \angle GOK - \angle ABC) = 180^\circ - (\angle LOK - \angle ABC) = 180^\circ - (155^\circ - 53^\circ) = 78^\circ.$$

(первое равенство следует из суммы углов треугольника AMC).

Задание 4.

При каком наименьшем n все натуральные делители числа n можно поделить на три группы, суммы в которых равны? Если группа состоит из одного числа, то сумма чисел в этой группе равна этому одному числу.

Ответ: 120. **Решение.** Заметим, что $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому сумма всех делителей числа 120 равна $(1+2+4+8)(1+3)(1+5) = 15 \cdot 4 \cdot 6 = 360$. Поэтому нам надо поделить делители в группы с суммой 120. Подойдут группы $\{120\}$, $\{20, 40, 60\}$ и все оставшиеся числа.

Докажем теперь, что делители чисел меньше 120 нельзя поделить на три группы с равной суммой. Для этого докажем, что если n меньше 120, то сумма делителей числа n меньше $3n$. Поскольку у n всегда есть делитель, равный n, то сумма в одной группе должна быть хотя бы n, на этом и будет построено противоречие.

Вспомним

Утверждение. Сумма делителей числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ равняется

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_s + p_s^2 + \dots + p_s^{\alpha_s}).$$

Доказательство — просто раскрытие скобок.

Теперь из этого утверждения можно вывести, что

$$\sigma(n) = n\left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_s} + \dots + \frac{1}{p_s^{\alpha_s}}\right) < n\left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_s} + \dots\right) = n \cdot \frac{p_1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_s}{p_s - 1}$$

(в неравенстве мы заменили конечную сумму геометрической прогрессии на бесконечную).

Пусть теперь n — некоторое число. Если у $n = p^a$, то $\sigma(n) < n \cdot \frac{p}{p-1} \leqslant 2n < 3n$, поскольку число $\frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$ тем больше, чем меньше p. Аналогично, если $n = p^a \cdot q^b$, то $\sigma(n) < n \cdot \frac{p}{p-1}\frac{q}{q-1} \leqslant n\frac{2}{2-1} \cdot \frac{3}{3-1} = 3n$. Итак, если $\sigma(n) \geqslant 3n$, то в разложение n входит хотя бы 3 простых числа. Поскольку уже $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 120$, то нас интересуют лишь n, в разложении которых ровно три простых числа.

Если среди этих простых чисел нет 2: если среди них нет и 3, то $n \geqslant 5 \cdot 7 \cdot 11 > 120$, значит 3 есть; если нет 5, то $n \geqslant 3 \cdot 7 \cdot 11 > 120$, значит и 5 есть; если нет 7, то $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 11 > 120$, значит и 7 есть. Тогда $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ (добавление ещё одного простого сделает n больше 120), сумма делителей которого равна $(1 + 3)(1 + 5)(1 + 7) = 192 < 315$. Значит, n обязательно делится на 2.

Если среди простых делителей нет 3: если среди них нет 5, то $n \geqslant 2 \cdot 7 \cdot 11 > 120$, значит 5 есть; если следующее число хотя бы 13, то $n \geqslant 2 \cdot 5 \cdot 13 > 120$. Итак, третье простое число в разложении — или 7, или 11. Опять же, $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, поэтому домножение ещё на одно простое сделает n больше 120. Поэтому остаются два варианта: $n = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ и $n = 2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$, суммы делителей которых равны $3 \cdot 6 \cdot 8 = 144 < 210$ и $3 \cdot 6 \cdot 12 = 216 < 330$ соответственно. Оба эти варианта не подходят, так что n делится на 3.

Пусть третий простой делитель p. Заметим, что $2 \cdot 3 \cdot p \geqslant 30$; посольку мы ищем $n < 120$, то домножить $2 \cdot 3 \cdot p$ мы можем максимум на 3. Итак, получили всего немного вариантов: или $n = 2 \cdot 3^2 \cdot p$, или $n = 2^2 \cdot 3 \cdot p$, или $n = 2 \cdot 3 \cdot p$. В первом случае при $p \geqslant 7$ получаем $n \geqslant 126$, при $p = 5$ получаем $n = 90$, а $\sigma(90) = (1 + 2)(1 + 3 + 9)(1 + 5) = 234 < 270$. Во втором случае, $\sigma(n) = (1 + 2 + 4)(1 + 3)(1 + p) = n \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{p+1}{p}$; если $\sigma(n) \geqslant 3n$, то $\frac{p+1}{p} \geqslant \frac{9}{7}$, откуда $p < 5$, что неверно. Аналогично, в третьем случае $\sigma(n) = (1 + 2)(1 + 3)(1 + p) = n \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{p+1}{p}$, откуда $\frac{p+1}{p}$ должно быть хотя бы $\frac{3}{2}$, то неверно при $p \geqslant 5$.

Задание 5.

Пусть k — целое неотрицательное число, не превосходящее 1001. На доске написаны k единиц и $1001 - k$ нулей, т.е. всего на доске 1001 число. Саша и Марина играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Саша. В свой ход Саша может заменить два каких-то числа на их произведение. Марина в свой ход может заменить два одинаковых числа на ноль, а два разных числа — на 1. Так они ходят до тех пор, пока на доске не останется ровно одно число. Если это единица — выигрывает Саша, если ноль — Марина. При каких k

выигрывает Саша?

Ответ: Только $k = 1$ и $k = 2$.

Решение. Заметим, для начала, что если на доске чётное количество чисел, то ходит Марина, а если нечётное — Саша.

Докажем, что если на доске ровно одна единица, то выигрывает Саша. Если сейчас ход Марины, то она не может убрать ровно одну единицу, поэтому после её хода тоже останется ровно одна единица. Если сейчас ход Саши, то или игра уже закончилась (и на доске всего одна единица), или помимо этой одной единицы есть ещё хотя бы два нуля, которые Саша и перемножает, передавая Марине ситуацию с одной единицей.

Тогда, если $k = 1$, то Саша сразу находится в выигрышном для себя положении, а если $k = 2$, то он должен первым ходом перемножить две единицы и передать Марине ситуацию ровно с одной единицей.

Докажем теперь, что если $k = 0$ или $k \geqslant 3$, то выигрывает Марина. Заметим, что если в какой-то момент на доске окажутся одни нули, то Марина выигрывает. Тогда при $k = 0$ Марина точно уже выиграет.

Назовём ситуацию, в которой на доске есть хотя бы три единицы и хотя бы один ноль — *разнообразной*. Докажем, что если на доске образовалась разнообразная ситуация, то выигрывает Марина.

Пусть сейчас ход Саши. Если он оставляет ситуацию разнообразной — хорошо. Если же он сделал ситуацию не разнообразной, то поскольку убрать ноль он не может, как и убрать сразу две единицы, то сейчас на доске ровно две единицы, а остальные нули. Марина своим следующим ходом заменяет эти две единицы на 0, и теперь на доске одни нули.

Пусть сейчас ход Марины. Перед ней точно есть 1, 1, 1, 0. Если есть какие-то ещё числа, то их чётное количество, то есть хотя бы два, поэтому она может сделать ход с ними, оставив ситуацию разнообразной. Если же других чисел нет, то Марина меняет 1, 0 на 1, оставляя Саше 1, 1, 1; тогда он делает ход и оставляет 1, 1, и Марина выигрывает, делая после этого 0.

Осталось заметить, что при $k \geqslant 3$ и $k \neq 1001$, ситуация на доске уже разнообразная, а при $k = 1001$, Марина может сделать её разнообразной своим первым ходом.