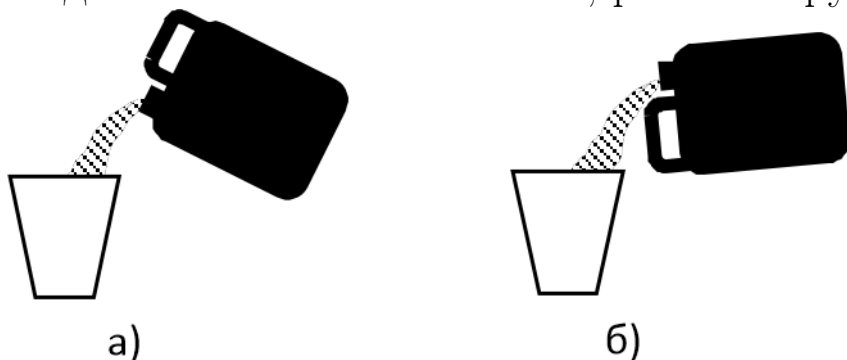


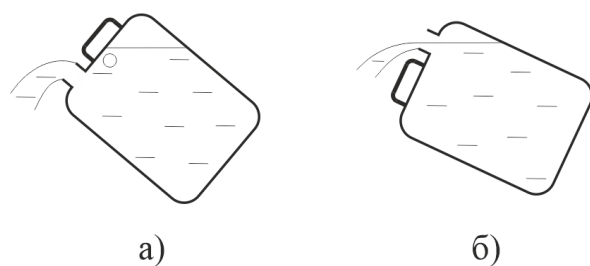
Задача 1. (задача для школьников 5-7 классов)

Почему, когда выливаешь воду из канистры, как показано на *рис. а*, вода выливается рывками и булькает, а если выливать её, как показано на *рис. б*, то вода выливается «спокойно», ровной струёй?



Решение.

Для того, чтобы из канистры вылилось некоторое количество воды, в нее должен зайти такой же объем воздуха. В случае а) горловина канистры находится внизу, поэтому при наклоне оказывается ниже уровня жидкости (см. рисунок). Входящему в канистру воздуху приходится «пробулькивать» сквозь воду, останавливая ее поток. Поэтому вода выливается рывками и булькает. В случае б) горловина располагается сверху, и при наклоне вода начинает выливаться, когда ее уровень достигнет горловины. При этом струя не занимает все отверстие – над ее поверхностью остается зазор, через который воздух проходит внутрь канистры не мешая воде выливаться.



Задача 2. (задача для школьников 5-8 классов)

Почему первый снег оставляет на железной крыше рисунок, повторяющий рисунок стропил (балок, поддерживающих крышу снизу)?

Решение.

Снег на крыше тает из-за тепла, которое поступает снизу из дома (там работает отопление). Деревянные балки стропил проводят тепло гораздо хуже, чем металлические листы крыши. Поэтому снег, лежащий над этими балками, получает намного меньше тепла, чем снег, который отделен от чердака только тонким листовым металлом, и дольше остается нерастаявшим.

Задача 3. (задача для школьников 5-8 классов)

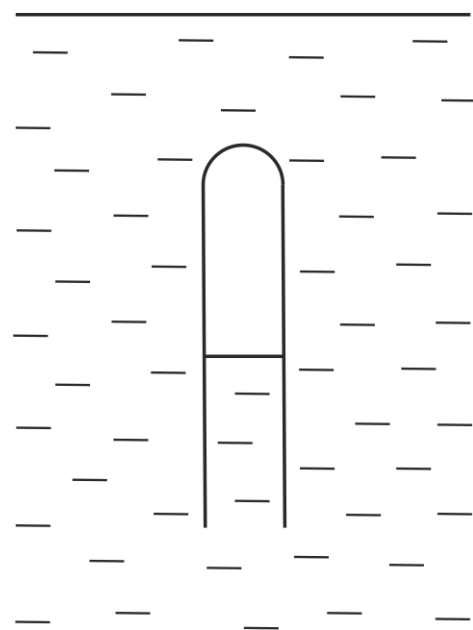
Опустим в сосуд с водой перевернутую вверх дном пробирку – так, чтобы в ней остался воздух (см. рисунок). Если правильно подобрать количество воздуха, пробирка сможет на некоторой глубине плавать, не всплывая и не опускаясь.

Будет ли ее равновесие устойчивым или неустойчивым? Другими словами, если она чуть-чуть сместится вверх или вниз, она вернется в начальное положение или начнет еще дальше от него удаляться, пока не всплывет на поверхность или не опустится на дно сосуда? (ответ без аргументации не оценивается)

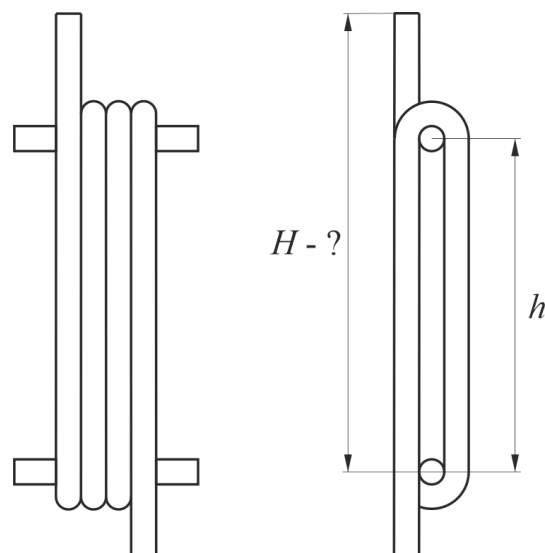
Ответ обоснуйте.

Решение.

В глубине покоящейся жидкости всегда имеется давление, возникающее из-за веса лежащих выше слоев (гидростатическое). Чем глубже, тем больше это давление. Чем больше давление – тем меньше объем воздуха в пробирке. У пробирки будет нулевая плавучесть (она не будет ни тонуть, ни всплывать) на той глубине, на которой объем воздуха станет таким, что полная сила Архимеда (равная весу вытесненной пробиркой с воздухом воды) будет равна действующей на пробирку силе тяжести. Если пробирка с этой глубины чуть-чуть сместится вверх, давление окружающей ее воды станет меньше, воздух расширится, сила Архимеда возрастет и станет больше силы тяжести. Пробирка начнет всплывать, воздух будет еще сильнее расширяться, сила Архимеда возрастать – пока пробирка не окажется на поверхности воды. Если же она из положения нулевой плавучести сместится вниз, давление окружающей ее воды станет больше, воздух сожмется, сила Архимеда уменьшится и станет меньше силы тяжести. Пробирка начнет тонуть, воздух будет еще сильнее сжиматься, сила Архимеда уменьшаться – пока пробирка не окажется на дне сосуда. Таким образом, ее равновесие является неустойчивым.



Задача 4. (задача для школьников 8-11 классов) Гибкий шланг намотан на два горизонтальных стержня, расположенных один под другим на расстоянии $h = 0,5$ м. Шланг делает вокруг стержней три полных оборота. Диаметры шланга и стержней малы по сравнению с h . В уходящий вверх конец шланга начинают наливать воду.



а) До какой высоты H поднимется вода в этой части шланга, прежде чем начнет выливаться с другого конца? (в метрах)

Запишите решение.

б) Если расстояние h увеличить в 10 раз, то высота H увеличится не в той же пропорции. Почему?

При необходимости можете прикрепить к этому пункту чертёж решения. Загружать можно файл в формате .jpg, .png размером до 2,5 Мб. Пожалуйста, не грузите фотографию в последний момент. Это может занять некоторое время. После загрузки файла, его содержимое начинает отображаться на странице. Дождитесь загрузки файла. Не забудьте сохранить решение после загрузки. Все комментарии к решению должны быть набраны в текстовое поле.

Меньше или больше чем в 10 раз изменится эта высота? (ответ без решения в пункте б не оценивается)

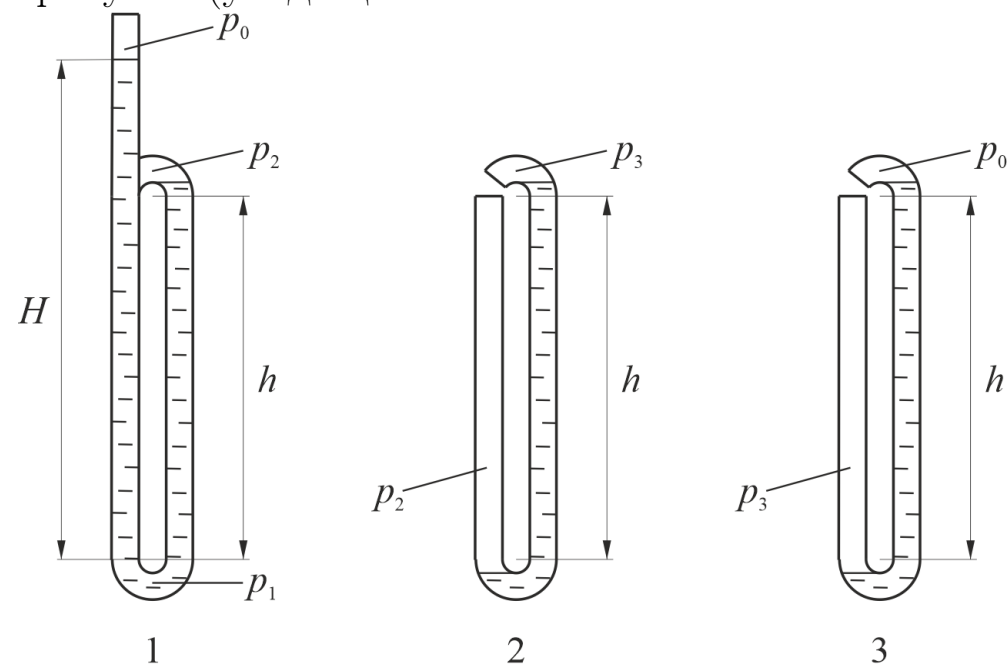
в) Найдите высоту H (в метрах) для $h = 5$ м. Плотность воды $\rho \approx 1000$ кг/м³, атмосферное давление $p_0 \approx 10^5$ Па.

Решение.

а) Если начать наливать воду в верхний конец шланга, она сначала будет заполнять первый виток, причем уровни воды в двух вертикальных коленах этого витка будут одинаковы. Воздух из шланга будет свободно вытесняться водой и над поверхностями воды слева и справа будет одинаковое (атмосферное) давление. Так будет происходить, пока уровень воды не достигнет верха витка. После этого вода начнет переливаться во второй виток. В его нижней части образуется водяная пробка, которая отсечет воздух, находящийся в левом колене, и этот воздух в дальнейшем так и останется в шланге. В результате уровень воды будет подниматься только в правом (еще открытом в атмосферу) колене, а в левом останется в нижней точке витка. Давление в «запертом» воздухе будет расти, но изменением его объема в данном случае можно пренебречь. Действительно, при $h = 50$ см гидростатическое давление $\rho gh \approx 5 \times 10^3$ Па $\approx 0,05$ атм, то есть относительное изменение давления (а значит, и объема) воздуха достаточно мало. Поэтому можно считать, что

высота воздушного столба при дальнейшем доливании воды не меняется.

Когда уровень воды в правом колене второго витка дойдет до верха, она начнет переливаться в третий виток. В нем произойдет то же самое – вода отсечет в левом колене воздушный столб и будет подниматься только в правом колене. Когда ее уровень достигнет верха витка, она начнет выливаться из шланга. Расположение уровней воды в витках к этому моменту изображено на рисунке (уходящая вниз часть шланга не показана).



Чтобы найти искомую высоту H , начнем с третьего витка. Поскольку он открыт в атмосферу, давление воздуха над поверхностью воды в его правом колене равно p_0 (атмосферному). Тогда давление воздуха в левом колене равно, очевидно

$$p_3 = p_0 + \rho gh$$

(Поскольку диаметр стержней мал по сравнению с h и мы пренебрегаем сжатием воздушного столба, можно считать, что разность уровней воды в этом витке равна h). Это же давление будет над поверхностью воды в правом колене второго витка. Тогда давление воздуха в его левом колене равно

$$p_2 = p_3 + \rho gh = p_0 + 2\rho gh$$

Это же давление будет над поверхностью воды в правом колене первого витка. Давление в нижней точке этого витка равно

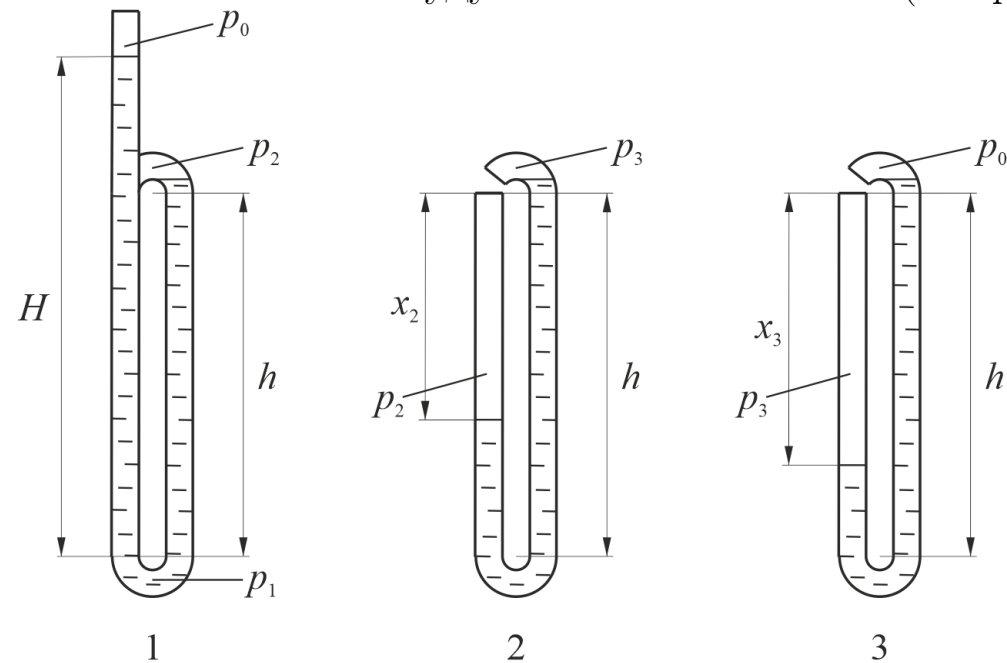
$$p_1 = p_2 + \rho gh = p_0 + 3\rho gh$$

С другой стороны, это же давление равно $p_0 + \rho gH$. Отсюда получаем ответ:

$$H = 3h = 1,5 \text{ м}$$

Ускорение свободного падения g здесь и далее считаем приближенно равным 10 м/с^2 .

б), в) Если высоту H увеличить в 10 раз, нельзя будет пренебрегать сжатием воздуха во втором и третьем витках. При $h = 5 \text{ м}$ гидростатическое давление $\rho gh \approx 5 \times 10^4 \text{ Па} \approx 0,5 \text{ атм}$, значит, в этом случае давление воздуха в воздушных столбах заметно превышает атмосферное. Следовательно, высоты этих столбов будут заметно меньше h (см. рисунок).



Отсюда ясно, что высота H в этом случае вырастет не в 10 раз, а **меньше**. Это следует из того, что разности уровней воды во втором и третьем витках (определяющие добавочное гидростатическое давление) станут меньше, чем h , то есть вырастут меньше чем в 10 раз.

Обозначим эти разности уровней через x_2 и x_3 . Давление воздуха в третьем витке равно

$$p_3 = p_0 + \rho g x_3$$

С другой стороны, это давление по закону Бойля–Мариотта (температуру воздуха, очевидно, можно считать неизменной) равно

$$p_3 = \frac{h}{x_3} p_0$$

(Поскольку диаметры шланга и стержней малы по сравнению с h , можно пренебречь вкладом в объем воздуха, который дают закругления внизу и сверху витка. Тогда этот объем можно считать прямо пропорциональным высоте воздушного столба x .) Приравняв эти два выражения, получаем для x_3 квадратное уравнение:

$$x_3^2 + \frac{p_0}{\rho g} x_3 - \frac{p_0 h}{\rho g} = 0$$

Чтобы избежать громоздких формул, дальнейшие вычисления сделаем в численном виде. Подставив значения параметров в системе СИ в уравнение для x_3 , получаем:

$$x_3^2 + 10x_3 - 50 = 0$$

Решив это уравнение и отбросив не имеющий физического смысла отрицательный корень, находим высоту воздушного столба в третьем витке $x_3 \approx 3,7$ м и давление в этом столбе

$$p_3 = p_0 + \rho g x_3 \approx 1,37 \times 10^5 \text{ Па}$$

Совершенно аналогично для высоты столба во втором витке x_2 получаем уравнение:

$$x_2^2 + \frac{p_3}{\rho g} x_2 - \frac{p_0 h}{\rho g} = 0$$

Подставив в него найденное значение p_3 и значения параметров, приводим его к виду:

$$x_2^2 + 13,7x_2 - 50 = 0$$

Положительный корень этого уравнения $x_2 \approx 3,0$ м. С помощью него находим давление воздуха во втором витке:

$$p_2 = p_3 + \rho g x_2 \approx 1,67 \times 10^5 \text{ Па}$$

и давление воды в нижней точке первого витка:

$$p_1 = p_2 + \rho g h \approx 2,17 \times 10^5 \text{ Па}$$

Это же давление должно быть равно $p_0 + \rho g H$. Отсюда находим $H \approx 11,7$ м.

Задача 5. (задача для школьников 9-11 классов)

Установленное на экваторе дальнобойное орудие стреляет точно на север, выпуская снаряд под углом 45° к горизонту. Дальность полета снаряда при этом оказывается равной 20 км.

а) Найдите начальную скорость снаряда, время его полета и максимальную высоту, на которую он поднимается. Ускорение свободного падения $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Запишите решение.

б) Выпущенный так снаряд в цель (расположенную строго на севере от орудия) не попадет, т.к. из-за вращения Земли его траектория отклонится вбок. Куда отклонится снаряд – на восток или на запад? (ответ без аргументации не оценивается)

Обоснуйте свой ответ.

в) Оцените расстояние, на которое снаряд отклонится от цели (*в метрах*). Радиус Земли $R \approx 6400$ км.

Запишите решение.

Решение.

а) Пусть $S = 2 \times 10^4$ м – дальность полета снаряда, v_0 – его начальная скорость, t – время полета, H – максимальная высота траектории. Поскольку по горизонтали снаряд движется с постоянной скоростью $v_0 \cos 45^\circ$, имеем уравнение:

$$S = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t$$

С другой стороны, за время $t/2$ снаряд поднимается до высшей точки своей траектории, и его вертикальная скорость обращается в ноль. Тогда по известным формулам равноускоренного движения:

$$v_0 \sin 45^\circ - gt/2 = 0$$

Решая совместно эти два уравнения, получаем:

$$v_0 = \sqrt{gS} \approx 450 \text{ м/с}$$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}} \approx 63 \text{ с.}$$

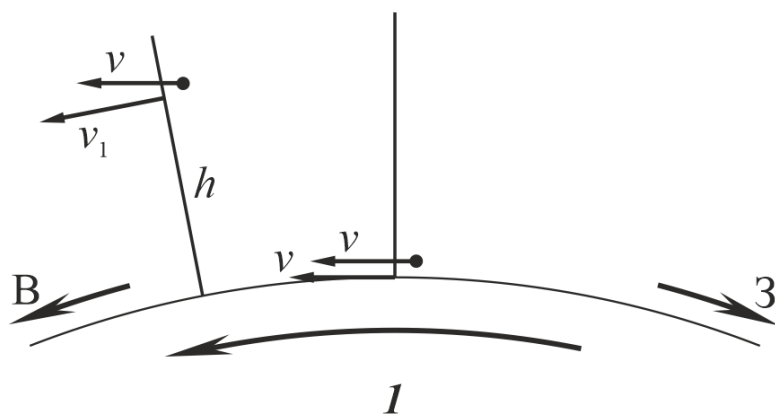
Максимальная высота подъема

$$H = v_0 \sin 45^\circ t/2 - \frac{g(t/2)^2}{2} \approx 5000 \text{ м.}$$

б), в) Почему вообще вращение Земли приводит к отклонению траектории снаряда? Вовсе не потому, что за время его полета земной шар успеваает «провернуться» под ним, как считают некоторые. В момент выстрела пушка имеет точно такую же линейную скорость, которую имеют все точки экватора из-за вращения Земли (в невращающейся системе отсчета, связанной с центром нашей планеты). Эту скорость приобретет и вылетевший из нее снаряд (кроме той скорости, которую сообщает ему орудие относительно Земли). Поэтому в первом приближении снаряд должен упасть на землю без всякого смещения к востоку или к западу.

Смещение возникает по гораздо более тонким причинам. Оно связано с тем, что во время полета снаряд довольно высоко поднимается над землей, в результате изменяется расстояние от него до оси вращения земного шара. Объяснить и описать это смещение можно с помощью так называемой силы Кориолиса – одной из сил инерции, возникающей в неинерциальной (вращающейся) системе отсчета. Но можно обойтись и без этого научного понятия.

Представим себе, что рядом с местом выстрела построена вертикальная стена огромной высоты, идущая с юга на север. Начальная скорость снаряда параллельна стене, поэтому на первый взгляд кажется, что расстояние между ними во время полета меняться не должно. Но посмотрим внимательнее. Пусть $T = 24$ ч – период обращения Земли вокруг своей оси, $R \approx 6400$ км – радиус Земли. В момент выстрела снаряд находится на уровне земли, поэтому в невращающейся системе отсчета (рисунок 1, вид со стороны Северного полюса, пропорции сильно искажены для наглядности) и он, и находящееся рядом основание стены имеют одну и ту же линейную скорость

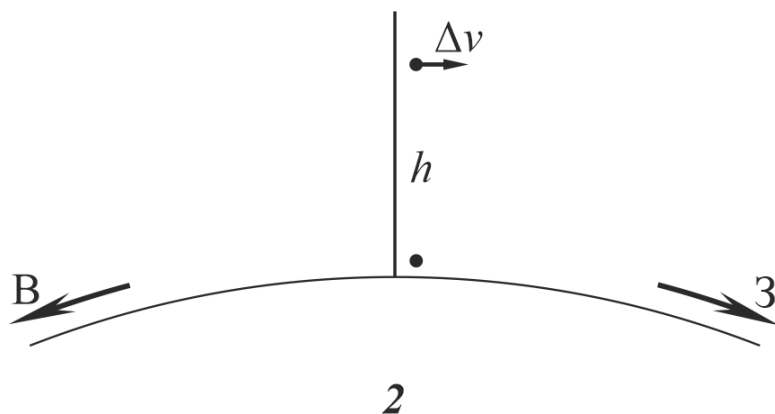


$$v = \frac{2\pi R}{T} \approx 465 \text{ м/с.}$$

Но когда снаряд поднимется на некоторую высоту, он окажется рядом с точками стены, линейная скорость которых в этой системе отсчета **больше**, чем v , потому что они находятся дальше от оси вращения Земли. А снаряд сохранит свою скорость неизменной (в этом направлении), так как наша система отсчета является инерциальной. В результате он будет отставать от стены, смещаясь относительно нее **к западу**. Если высота полета снаряда h , скорость точек стены, рядом с которыми он пролетает, равна

$$v_1 = \frac{R + h}{R}v,$$

потому что линейная скорость точек вращающегося твердого тела прямо пропорциональна расстоянию до оси вращения. Значит, в системе отсчета Земли (рисунок 2) мы увидим, что снаряд удаляется от стены со скоростью



$$\Delta v = v_1 - v = \frac{h}{R}v.$$

Непараллельностью векторов v и v_1 можно пренебречь – угол поворота Земли за время полета снаряда очень мал. Скорость Δv , как видим, зависит

от высоты полета снаряда. Для оценки можно считать, что его средняя высота за время полета равна половине максимальной: $h_{\text{ср}} \sim H/2$. Тогда средняя скорость удаления:

$$v_{\text{ср}} \sim \frac{H}{2R}v \approx 0,18 \text{ м/с.}$$

Умножив ее на время полета, получим расстояние, на которое снаряд отклонится от цели:

$$l = v_{\text{ср}}t \sim 11 \text{ м.}$$

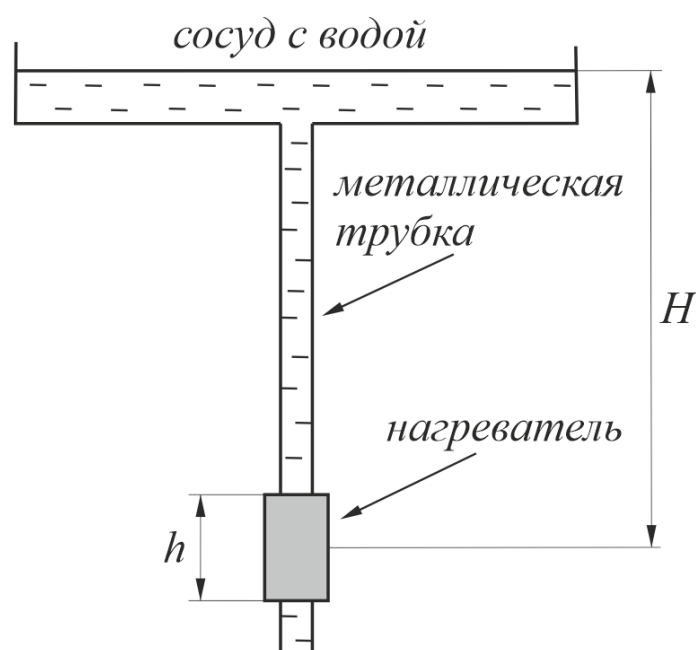
. Заметим, что это расстояние намного меньше, чем случайные отклонения снаряда, возникающие при стрельбе на такие дистанции (из-за бокового ветра, неоднородностей ствола и т.п.). Поэтому возможность реального наблюдения этого эффекта представляется сомнительной, если только речь не идет о сверхдальнобойных орудиях.

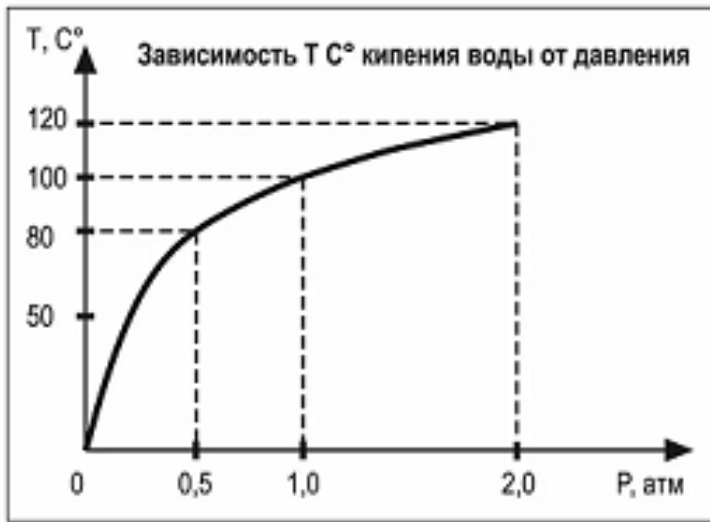
Задача 6. (задача для школьников 9-11 классов)

На рисунке показана модель гейзера, состоящая из сосуда с водой, металлической трубки, верхний конец которой открыт в сосуд, а нижний закрыт, и нагревателя, расположенного у нижнего конца этой трубки. Если нагреватель включить, из трубки в сосуд через равные промежутки времени начнет выбрасываться фонтан, состоящий из горячей воды и водяного пара (что и наблюдается в природе у настоящих гейзеров).

а) Почему это происходит?

б) Оцените время между выбросами такого устройства. Высота столба воды до нагревателя $H = 10$ м, площадь сечения трубки $S = 10 \text{ см}^2$, мощность нагревателя $P = 1$ кВт, длина нагреваемой им части трубки $h = 20$ см. Плотность воды $\rho \approx 1000 \text{ кг/м}^3$, ее удельная теплоемкость $c \approx 4200 \text{ Дж/(кг}\times\text{град)}$, атмосферное давление $p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$, график зависимости температуры кипения воды от давления приведен на рисунке.





Ответ запишите в секундах.

Запишите решение.

Решение.

а) Поскольку высота столба воды в трубке довольно большая, давление в воде в районе нагревателя заметно превышает атмосферное. При таком давлении ее температура кипения повышается и становится больше 100°C . Когда нагреватель доводит ее до кипения, в трубке возникают пузырьки водяного пара. Гидростатическое давление при этом падает, температура кипения – тоже, и вода оказывается перегретой. Дальнейшее ее вскипание происходит взрывным образом, почти мгновенно образуется большое количество пара, который выталкивает из трубки находящуюся в ней воду – наблюдается фонтан. Затем трубка заполняется водой из сосуда (комнатной температуры), нагреватель снова доводит ее до кипения, и все повторяется.

б) Из качественного анализа явления следует, что между выбросами проходят промежутки времени, которые нужны нагревателю чтобы нагреть воду от комнатной температуры $t \sim 20^\circ\text{C}$ до температуры кипения. Давление в воде на уровне нагревателя $p = p_0 + \rho g H \approx 2$ атм. По графику находим, что при таком давлении вода кипит при температуре $t_k \approx 120^\circ\text{C}$. Значит, нагревателю нужно нагреть ее на $\Delta t = t_k - t \sim 100^\circ\text{C}$. Для оценки будем считать, что все выделяемое им тепло достается воде в непосредственно нагреваемой им части трубки высотой $h = 20$ см. Масса этой воды:

$$m \sim \rho S h \approx 0,2 \text{ кг},$$

количество тепла, которое она должна получить, чтобы закипеть:

$$Q \sim cm\Delta t \approx 8 \times 10^4 \text{ Дж}.$$

Для времени между выбросами получаем оценку:

$$T = Q/P \sim 80 \text{ с}.$$

Задача 7. (задача для школьников 9-11 классов)

Если изготовить идеально прямую трубку длиной 1 км, расположить ее горизонтально, откачать из нее воздух и строго по ее оси запустить лазерный луч, на выходе из трубки луч окажется смещенным от оси вниз, т.к. в гравитационном поле его траектория искривляется.

а) Оцените смещение луча, считая, что он просто падает в гравитационном поле с ускорением свободного падения, как если бы был потоком массивных частиц. Скорость света в вакууме $c \approx 300000$ км/с.

Ответ запишите в миллиметрах.

Запишите решение.

б) Вспомним теперь, что свет – электромагнитная волна, и рассматривать его «свободное падение» по меньшей мере наивно. Волны не могут «падать», поскольку являются распространяющимися в пространстве колебательными процессами, а не массивными телами. Как в общем случае действует на свет гравитационное поле – сложный вопрос, относящийся к Общей теории относительности. Однако для нашей задачи вполне достаточно одного простого факта – в отсутствие гравитации свет в любой инерциальной системе отсчета распространяется по прямой (в вакууме). Придумайте обоснованное на этом факте рассуждение, позволяющее найти смещение луча без использования бессмысленного образа «свободного падения света». Сравните ответ, который оно дает, с ответом в пункте *a*.

Решение.

а) Если считать, что свет просто падает в гравитационном поле с ускорением свободного падения, получить оценку смещения луча очень просто. Свет проходит трубку за время $t = l/c$ (l – длина трубки). За это время он опускается на расстояние

$$h \sim \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{l}{c} \right)^2 \approx 6 \times 10^{-9} \text{ м.}$$

б) Корректное рассуждение, позволяющее вычислить смещение луча, выглядит следующим образом. Как мы знаем, в отсутствие гравитации свет в любой инерциальной системе отсчета распространяется по прямой. Но у поверхности Земли гравитация *есть*. Можно ли ее как-нибудь «выключить»? Можно! Для этого нужно перейти в свободно падающую систему отсчета. Хотя она и движется с ускорением относительно Земли, ее можно считать инерциальной системой отсчета, в которой гравитация Земли отсутствует. Это легко показать следующим образом. Представим себе систему отсчета, связанную с бесконечно удаленным от всех гравитирующих масс телом. Такая с.о. является строго инерциальной, и никакой гравитации в ней нет. Теперь возьмем большую платформу и будем двигать ее относительно нашей

с.о. с ускорением $-g$, перпендикулярным ее поверхности. Что обнаружат люди, живущие на этой платформе? Они обнаружат, что все тела, покоящиеся в нашей инерциальной с.о., в их системе отсчета падают на поверхность платформы с ускорением g . При этом они не будут знать – это происходит из-за ускоренного движения платформы относительно инерциальной системы отсчета или потому, что у них под ногами планета огромной массы, создающая гравитационное поле. Более того – эти две ситуации *принципиально* нельзя отличить друг от друга, находясь на платформе (не заглядывая под нее). В этом и состоит знаменитый принцип эквивалентности (или принцип равенства инертной и гравитационной масс), лежащий в основе Общей теории относительности. Значит, искривление луча света, происходящее в гравитационном поле Земли, будет таким же, как наблюдаемое жителями платформы. А это последнее вычислить очень легко. В исходной инерциальной системе отсчета свет будет идти строго по прямой. Но за время его распространения платформа вместе с трубкой сместится на расстояние $(gt^2/2)$. Поэтому луч выйдет из трубки ровно на этом расстоянии от ее оси. Как видим, ответ на вопрос задачи (не оценка, а точный ответ!) совпадает с тем, который давало наивное рассуждение пункта а):

$$h = \frac{gt^2}{2} \approx 6 \times 10^{-9} \text{ м.}$$

Как относиться к этому удивительному совпадению? Значит ли оно, что в Общей теории относительности вообще нет никакой нужды, а к свету можно просто применять законы Ньютоновской механики? Конечно, нет! Такие серьезные выводы нельзя делать из совпадения ответов в одной-единственной задаче. Если посмотреть на все доступные наблюдению гравитационные явления, то выясняется, что иногда Ньютоновская механика действительно предсказывает ту же величину эффекта, что и ОТО – как в нашей задаче или в случае гравитационного красного смещения (изменения частоты света, поднимающегося в гравитационном поле). Иногда ответы отличаются в несколько раз (например, в два раза – в случае отклонения света неоднородным гравитационным полем планеты или звезды). А некоторые явления Ньютоновская механика вообще не может объяснить, в отличие от ОТО – например, смещение перигелия орбиты Меркурия. И во всех названных случаях именно предсказания ОТО подтверждаются экспериментами (в границах погрешности измерений). Поэтому современная наука считает установленным, что Общая теория относительности является более общей научной теорией, чем Ньютоновская механика.