Задание 1.

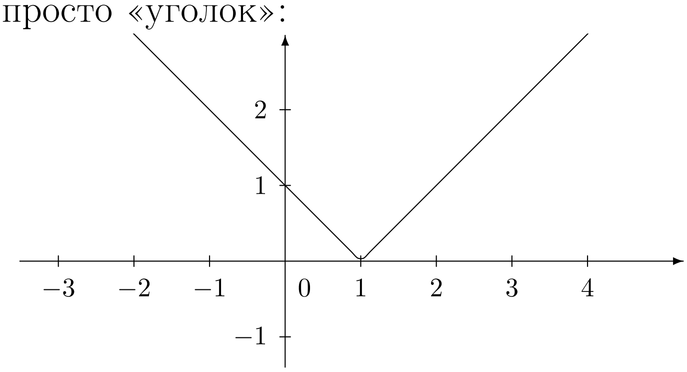
Пусть $f(x) = |x-1|$. Решите уравнение $f(f(f(\ldots(f(x))\ldots))) = 0$ (буква f написана 2021 раз).

Ответ: -2019, -2017, $\ldots$, -1, 1, 3, $\ldots$, 2021.

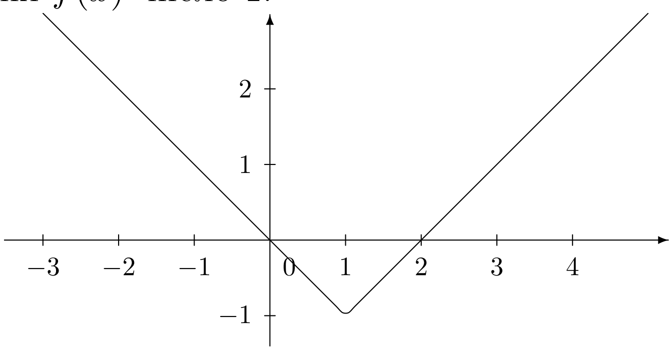
Первое решение. Обозначим $f(f(f(\ldots(f(x))\ldots)))$, где буква f написана k раз, за $f^{(k)}(x)$. Докажем, что корнями уравнения $f^{(k)}(x) = 0$, являются числа $-k+2$, $-k+4$, $\ldots$, $k-2$, k. Доказывать будем индукцией по числу k. Если $k=1$, то корнями $f(x)=0$ является только число 1, что и требовалось.

Пусть мы уже доказали, что корнями $f^{(k)}(x)=0$ являются числа $-k+2$, $-k+4$, $\ldots$, $k-2$, k. Заметим, что $f^{(k+1)}(a) = f^{(k)}(f(a))$; то есть, для того, чтобы a было корнем уравнения $f^{(k+1)}(x) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $f(a)$ было корнем уравнения $f^{(k)}(x) = 0$. Значит, $f(a)$ должно равняться одному из чисел $-k+2$, $-k+4$, $\ldots$, $k-2$, k, т.е. расстояние от a до 1 должно равняться k, $k-2$, $\ldots$. А это и есть числа $1 \pm k$, $1 \pm (k-2)$, $\ldots$, т.е. числа $-k+1$, $-k+3$, $\ldots$, $k-1$, $k+1$. Переход доказан.

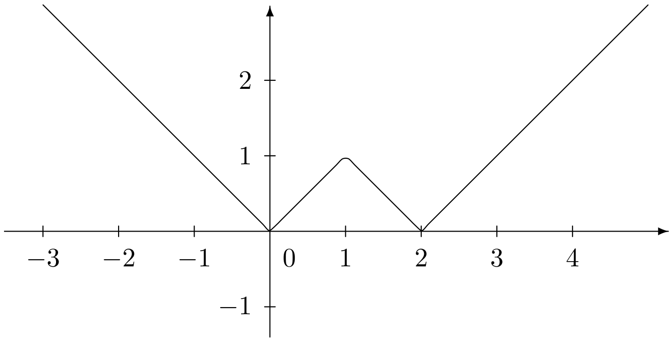
Второе решение. Давайте строить график функции $y = f(f(f(\ldots(f(x))\ldots)))$. Делать это будем последовательно: т.е. в начале построим график $f(x)$, потом $f(f(x))$, потом $f(f(f(x)))$, и так далее. График $f(x)$ это просто «уголок»:



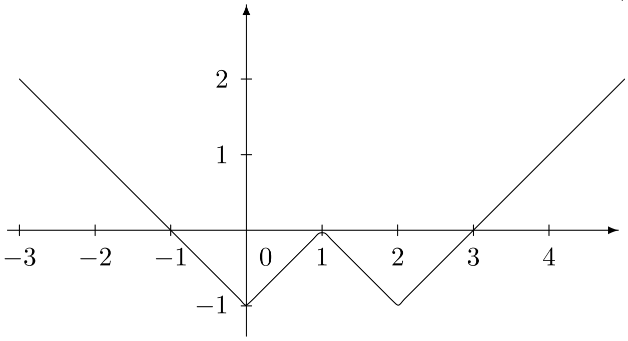
Как получить теперь график $f(f(x)) = |f(x)-1|$? Для этого надо вычесть из каждого значения $f(x)$ число 1:

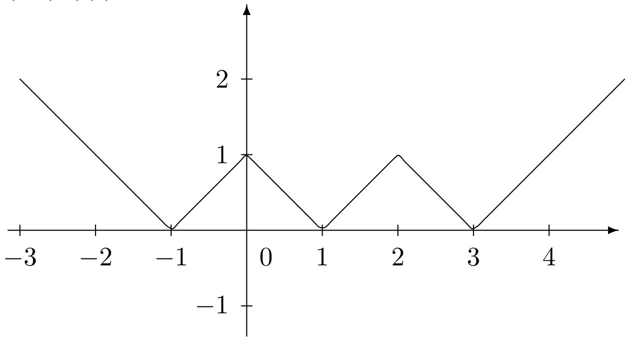


а потом взять модуль, т.е. отразить всё, что ниже оси абсцисс относительно неё:



Аналогично строится график $y = f(f(f(x)))$, т.е. спускаем на 1 и отражаем:





Будем так и продолжать: вычитать 1 и брать модуль. Заметим, что каждый график представляет из себя «пилу» с несколькими «зубьями», причём эта «пила» симметрична относительно прямой $x = 1$. При этом количество «зубьев» равняется количеству итераций функции f. Тогда для 2021 итерации будет 2021 «зуб», которые упираются в ось абсцисс в точках -2019, -2017, $\ldots$, -1, 1, 3, $\ldots$, 2021.

Задание 2.

Найдите количество четвёрок положительных целых чисел (a, b, c, d), таких, что $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ и

$$a! \cdot b! \cdot c! \cdot d! = 24!.$$

Напомним, что для целого положительного числа n через $n!$ обозначается произведение чисел от 1 до n: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ и так далее.

Ответ: 3.

Решение. Легко видеть, что $d \leqslant 24$. Заметим, что правая часть равенства делится на 23, а значит и левая часть должна делиться, откуда $d \geqslant 23$. Разберём два случая, чему может равняться d:

- $d = 24$: тогда $a! \cdot b! \cdot c! = 1$, откуда $a = b = c = 1$;
- $d = 23$: тогда $a! \cdot b! \cdot c! = 24 = 4!$; тогда, аналогично, или $c = 4$, или $c = 3$; разберём эти два случая
  - $c = 4$: тогда $a! \cdot b! = 1$, откуда $a = b = 1$;

– $d = 3$: тогда $a! \cdot b! = 4$; небольшим перебором убеждаемся, что тогда $a = b = 2$.

Итого, получаем три возможные четвёрки решений: $(1, 1, 1, 24)$, $(1, 1, 4, 23)$, $(2, 2, 3, 23)$.

Задание 3.

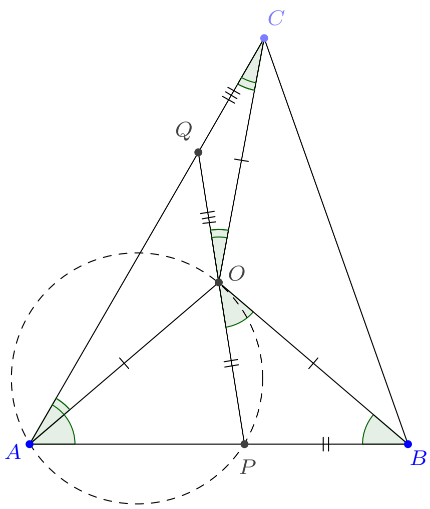
Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На сторонах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что описанная окружность треугольника APO касается прямой BO, описанная окружность AQO касается прямой CO, а периметр треугольника APQ равен $AB + AC$. Найдите величину угла $\angle BAC$.

Ответ: $60°$.

Решение. Поскольку описанная окружность треугольника APO касается прямой BO, $\angle POB = \angle PAO$. Кроме того, поскольку O — центр описанной окружности треугольника ABC, $OA = OB$, откуда $\angle OAB = \angle OBA$. Значит, $\angle POB = \angle PBO$, откуда $PB = PO$. Аналогично, $QO = QC$.

По условию, $AP + AQ + PQ = AB + AC$, то есть $PQ = PB + QC$. Из предыдущего абзаца мы знаем, что тогда $PQ = PO + OQ$, т.е. точки P, O и Q лежат на одной прямой.

Осталось посчитать уголки. Например, это можно сделать так:
$180° = (\angle POB + \angle QOC) + \angle BOC = (\angle PAO + \angle QAO) + \angle BOC =$
$\angle BAC + 2\angle BAC = 3\angle BAC$, откуда $\angle BAC = 60°$.



Задание 4.

Имеется табло 100×100, в каждой ячейке которого находится лампочка; исходно все лампочки выключены. К этому табло подключены 200 переключателей: по одному на каждую линию (т.е. строку или столбец). Переключатель меняет состояние всех лампочек той линии, к которой он относится:

горящие выключает, негорящие — включает. За 1 минуту 1 горящая лампочка расходует 1 единицу энергии.

Саша раз в минуту нажимает на какой-то переключатель. Он хочет нажать на каждый из переключателей ровно по одному разу. Приведите пример, как Саше нажимать на переключатели, чтобы количество израсходованных единиц энергии было минимально. Не забудьте доказать, что в вашем примере количество израсходованных единиц энергии действительно минимально.

Решение. Докажем, что если Саша переключает последовательно строки и столбцы, то количество затраченной энергии будет минимально. Для этого докажем даже более сильный факт: при таком алгоритме количество горящих лампочек в каждую минуту минимальное из возможных.

Пусть Саша нажал на n переключателей, из них i относились к строкам, а j — к столбцам. Тогда сейчас горят $100i + 100j - 2ij$ лампочек: $100i$ — лампочки в i выбранных Сашей строках, $100j$ — столбцах, ij — лампочки на их пересечении (их Саша уже выключил). Сумма $100i + 100j = 100(i + j) = 100n$ зависит только от номера текущей минуты. Хорошо известно, что если $i+j$ фиксировано, то произведение ij тем больше, чем меньше $|i-j|$. Осталось заметить, что если переключать последовательно строки и столбца, то $|i-j|$ на каждом шаге минимальное из возможных: 0 для чётных $i + j$ и 1 для нечётных.

Задание 5.

Фрэнк придумал способ кодирования чисел. Число n кодируется числом a_n по следующим правилам:

$a_1 = 1$; a_n получается из a_{n-1} так: Фрэнк смотрит, какие разряды в десятичной записи числа n отличаются от соответствующих разрядов числа $n-1$, и увеличивает в десятичной записи числа a_{n-1} на 1 только самый левый из этих разрядов (при этом 9 становится 0, а если разряда ещё не было, то Фрэнк считает, что в нём стоял 0). Например, $a_9 = 9$, $a_{10} = 19$, $a_{11} = 10$, $a_{12} = 11$. Какое число закодировано числом 2021? То есть найдите k, если известно, что $a_k = 2021$.

Ответ: 2245.

Решение. Что происходит, когда при увеличении $n - 1$ на 1 меняются s последних разрядов? Можно посмотреть на это так: мы к каждому из s последних разрядов прибавляем 1 по модулю 10. Способ кодирования Фрэнка состоит в том, что вместо прибавления 1 ко всем разрядам мы прибавляем 1 только к самому левому из них.

Тогда и способ декодирования становится понятен: как получилось число $a_k = 2021$? Мы $c_1 \equiv 2$ раз прибавляли 1 к разряду тысяч, $c_2 \equiv 0$ — к разряду сотен, $c_3 \equiv 2$ — к разряду десятков, $c_4 \equiv 1$ — к разряду единиц. Тогда, число

k получается, когда мы $c_1 \equiv 2$ раз прибавляли 1 к разряду тысяч, $c_1 + c_2 \equiv 2$ — к разряду сотен, $c_1 + c_2 + c_3 \equiv 4$ — к разряду десятков, $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \equiv 5$ — к разряду единиц. Получается, что ответ 2245.