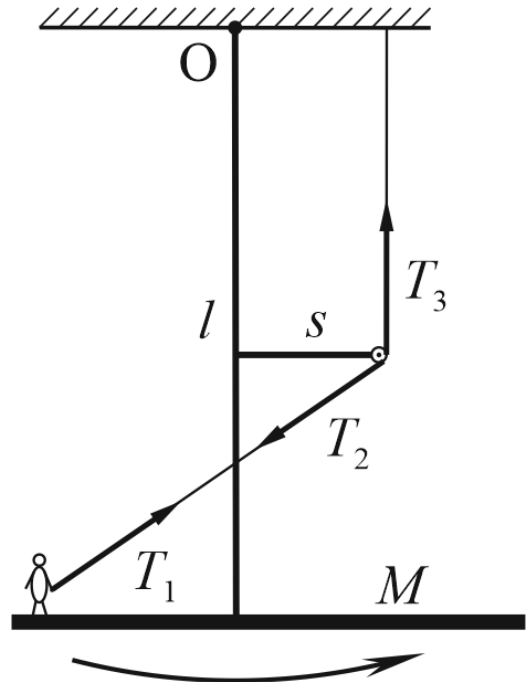
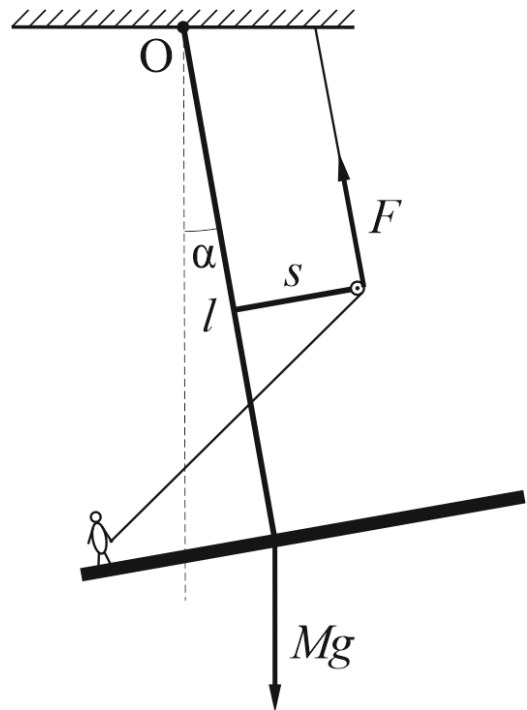


Задача №1.

а) Как только человек начнет тянуть за веревку, к силам, действующим на систему человек + платформа, добавятся три силы натяжения веревки – T_1 , действующая на руки человека, T_2 и T_3 , действующие на огибаемый ею блок. Эти три силы равны по модулю (и равны силе F), при этом T_1 и T_2 имеют еще и общую линию действия (см. рисунок). Значит, суммарный момент этих двух сил равен нулю относительно любой точки. Остается только сила T_3 . Ее момент относительно точки O (шарнира), как видно из рисунка, поворачивает платформу против часовой стрелки. Платформа отклонится вправо.



б) Обозначим угол отклонения стержня от вертикали в равновесии через α . Этот угол определяется равенством моментов силы тяжести Mg и силы натяжения T_3 (равной F по модулю) относительно точки O . Плечо силы тяжести, как видно из рисунка, равно $l \sin \alpha$. Для вычисления плеча силы натяжения в общем случае требуется довольно громоздкий геометрический расчет (четыреугольник в верхней части рисунка не является трапецией, поэтому угол между верхней частью веревки и вертикалью не равен α !). Однако в нашем случае в задаче есть малый параметр, а именно – сила F , с которой человек тянет за веревку, мала по сравнению с силой тяжести Mg : $F = 100 \ll Mg \approx 10000H$.



Отсюда понятно, что угол отклонения α заведомо будет очень мал: $\alpha \ll 1$. Поэтому при вычислении плеча силы F его можно просто положить равным нулю¹, то есть считать искомое плечо равным длине штанги s . По этой же

¹Подумайте сами, почему при вычислении этой величины малый α можно считать равным нулю, а при вычислении плеча силы тяжести так нельзя делать в принципе.

причине в плече силы тяжести $\sin \alpha$ можно заменить на α . Условие моментов тогда приобретает вид:

$$Mgl\alpha = Fs,$$

откуда получаем

$$\alpha = \frac{Fs}{Mgl} \approx 2,5 \times 10^{-3}$$

Как видим, этот угол действительно очень мал.

Задача №2.

а) Деформация всестороннего сжатия возникает, когда на брусок действует по паре сил вдоль каждого из ребер. Принцип суперпозиции для малых деформаций тогда означает, что изменение длины каждого из ребер есть сумма таких изменений под действием каждой из трех пар сил – в случае, когда на брусок действует только эта пара.

Если на прямоугольный брусок из однородного материала действует только одна пара сил вдоль одного из его ребер, то малая деформация запишется как

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{E} \frac{F_x}{S_x}, \quad \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{\Delta l_z}{l_z} = -\frac{\sigma}{E} \frac{F_x}{S_x} \quad (\text{только } F_x).$$

Здесь использован закон линейности малых упругих деформаций (обобщенный закон Гука), а также определения модуля Юнга и коэффициента Пуассона; F_x – величина каждой силы, l_x и Δl_x – длина ребра и ее изменение под действием *только этой* пары сил, S_x – площадь нормального (к этому ребру) сечения. Те же законы для единственной пары сил вдоль другого ребра (ортогонального первому) запишутся как:

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{E} \frac{F_y}{S_y}, \quad \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\Delta l_z}{l_z} = -\frac{\sigma}{E} \frac{F_y}{S_y} \quad (\text{только } F_y),$$

и аналогично для пары сил F_z вдоль третьего ребра.

Тогда, по принципу суперпозиции, деформация, например, первого ребра под действием *всех трех* пар сил будет равна

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{E} \frac{F_x}{S_x} - \frac{\sigma}{E} \frac{F_y}{S_y} - \frac{\sigma}{E} \frac{F_z}{S_z} \quad (\text{одновременно } F_x, F_y, F_z)$$

В нашем случае все три механических напряжения равны минус давлению в жидкости p :

$$\frac{F_x}{S_x} = \frac{F_y}{S_y} = \frac{F_z}{S_z} = -p$$

Относительные деформации бруска по всем трем осям тогда оказываются одинаковыми (такая деформация называется однородной) и равными

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta a}{a} = (-1 + 2\sigma) \frac{p}{E}.$$

Здесь l – длинное ребро бруска, a – короткое. Изменение объема бруска в силу малости деформаций может быть найдено как

$$\Delta V = (l + \Delta l)(a + \Delta a)^2 - la^2 \approx a^2 \Delta l + 2al \Delta a,$$

что соответствует относительному изменению

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{la^2} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta a}{a} = 3(-1 + 2\sigma) \frac{p}{E}.$$

Эту формулу можно записать как $p = K(\Delta V/V)$, коэффициент $K = \frac{E}{3(-1+2\sigma)}$ в ней называется *модулем всестороннего сжатия* данного вещества.

Подставив численные данные нашей задачи, получаем, что относительная деформация бруска по каждой из трех осей равна -10^{-3} . Значит, его длинное ребро сокращается на 0,1 мм, а короткое – на 0,01 мм. Относительное изменение объема получается равным $(\Delta V/V) = -3 \times 10^{-3}$.

Приведенные в условии задачи упругие свойства бруска соответствуют металлу свинец.

б) Этот случай в определенном смысле противоположен предыдущему: особенность сдвиговой деформации на рисунке в том, что (как видно из рисунка) сохраняется площадь изображенного сечения и вместе с ней объем образца.

На примере решения этой задачи мы проиллюстрируем общий подход к задачам об однородных упругих деформациях.

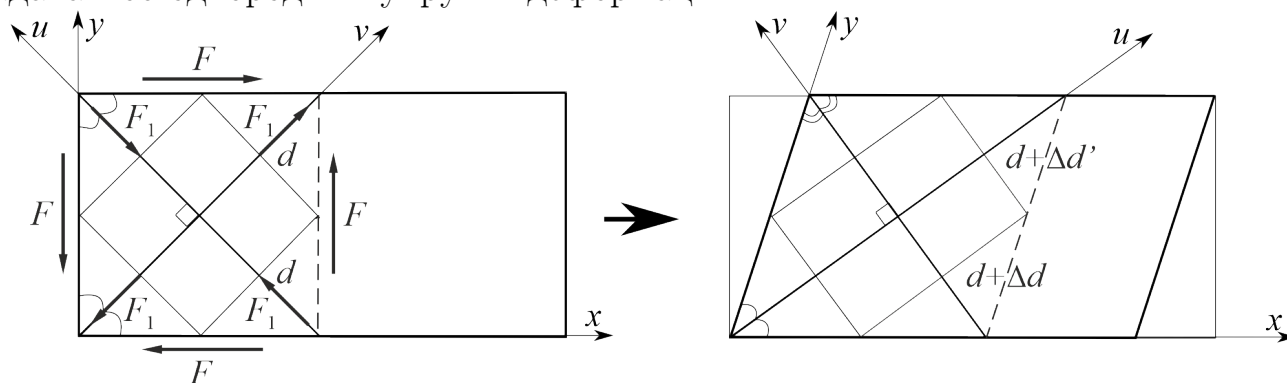


Рисунок 1

Тангенциальный сдвиг на рисунке 1 можно представить как композицию движения без деформации (поворот, параллельный перенос) и двух продольных деформаций (растяжения–сжатия) вдоль двух ортогональных осей. Для

этого нужно рассмотреть деформацию координатной сетки, связанной с деформируемым образцом. Можно показать, что при малых деформациях прямые линии остаются прямыми. Если к тому же найдется пара прямых, между которыми сохраняется прямой угол, то построенная на них координатная сетка останется прямоугольной – то есть при деформации сможет только сжиматься или растягиваться вдоль своих осей (см. рисунок 1).

Покажем, что нужным свойством обладают биссектрисы смежных углов сечения на рисунке (оси u и v).

Во-первых, биссектриса при деформации остается таковой. Действительно, при малом сдвиге прямая, идущая под углом ϕ к горизонтали наклонится на угол $\Delta\phi \approx \theta \sin^2 \phi$, где θ – угол наклона вертикальной прямой (см. рисунок 2) – при $\phi = \pi/4$ это дает $\Delta\phi \approx \theta/2$, а значит, эта прямая по-прежнему будет делить угол при вершине пополам. Во-вторых, при сдвиге противоположные стороны сечения остаются параллельными, так что сумма смежных углов всегда равна π , а угол между их биссектрисами остается равным $\pi/2$.

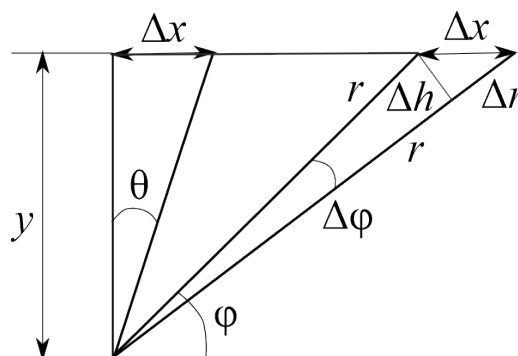


Рисунок 2

Новые оси (u, v) направлены под углом $\pi/4$ к исходным осям (x, y).

Выделим в недеформированном образце ячейку в форме квадрата со сторонами длины d , параллельными биссектрисам (см. рисунок 1). Как мы показали выше, при сдвиговой деформации эта ячейка примет форму прямоугольника со сторонами $d + \Delta d$ и $d + \Delta d'$ (при этом ячейка также сдвинется и повернется относительно исходного положения). По определению сдвиговой деформации, площадь ячейки должна сохраниться, то есть $\Delta S = (d + \Delta d)(d + \Delta d') - d^2 \approx (\Delta d + \Delta d')d = 0$, откуда $\Delta d' = -\Delta d$ (одна сторона растянута, другая сжата на ту же величину).

Описанная деформация квадратной ячейки достигается под действием двух пар сил, действующих вдоль ее сторон² (то есть под углом $\pi/4$ к сторонам бруска, см. рисунок 1).

В данном случае вдоль одной пары сторон действует пара растягивающих, а вдоль другой – пара сжимающих сил, причем (из симметрии задачи) эти силы равны по величине.

Пусть F_1 – величина каждой из сжимающих или растягивающих сил. Ана-

²См. Комментарий.

логично пункту а),

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{E} \frac{F_1}{S} - \frac{\sigma}{E} \left(-\frac{F_1}{S} \right) = \frac{1 + \sigma}{E} \frac{F_1}{ad},$$

где $S = ad$ – площадь, по которой распределена сила F_1 (прямоугольник со стороной d в плоскости рисунка и стороной a , нормальной к рисунку).

Проекции этих сил на горизонтальное направление должны быть равны внешним силам F , приложенным к горизонтальным граням отделенного пунктиром «кубика»: $2F_1/\sqrt{2} = F$ – поэтому $F_1 = F/\sqrt{2}$. Также, как видно из рисунка 2, при наклоне этого кубика на угол θ относительное удлинение его биссектрисы ($\phi = \pi/4$) равно $\Delta r/r = \theta \sin(\pi/4) \cos(\pi/4) = \theta/2$. Таким же должно быть и относительное удлинение стороны нашей «повернутой» ячейки: $\Delta d/d = \Delta b\sqrt{2}/a = \theta/2$. Таким образом,

$$\theta = 2\Delta d/d = \frac{2(1 + \sigma)}{E} \frac{F/\sqrt{2}}{a^2/\sqrt{2}} = \frac{2(1 + \sigma)}{E} \frac{F}{a^2}.$$

Традиционно этот результат записывают в виде формулы для тангенциального напряжения сдвига (сдвигающей силы, приходящейся на единицу площади): $F/a^2 = G\theta$, где коэффициент $G = E/(2(1 + \sigma))$ называется *модулем сдвига* данного материала.

В нашей задаче напряжение сдвига равно $F_0/(la)$, где F_0 – полная сдвигающая сила, приложенная к верхней пластине. Отсюда, подставив численные данные, получаем: $\theta \approx 8,8 \times 10^{-3}$ рад.

Комментарий.

Строго говоря, деформация в условии задачи не является однородной. В противном случае сила, приложенная к бруску вместе с противоположной силой со стороны опоры создавали бы крутящий момент. На самом деле, если брусок останется в покое под действием приложенной силы, он окажется растянутым в левой части и сжатым в правой. При этом высота бруска также изменится на величину, заданную коэффициентом Пуассона. При положительном коэффициенте в правой части брусок увеличится в высоту и будет давить на пластины, а в левой части он сократится и создаст напряжение разрыва. Возникшие в результате нормальные силы реакции создадут момент, компенсирующий крутящий момент тангенциальных сил.

Таким образом, в описанном случае некорректно говорить о единственной нормальной силе, приложенной ко всей грани бруска, поскольку на каждый элемент грани действует сила своей величины. Однако можно рассмотреть

малый элемент грани и считать, что к нему приложена сила, равная силе реакции в точке, где расположен этот элемент. Для упрощения формул мы выберем элемент в виде квадрата – поскольку элемент малый, это не ограничит общность рассмотрения.

В описанном случае каждый из малых квадратов в сечении испытывает чисто сдвиговую деформацию (то есть сохраняется площадь деформированного сечения и, следовательно, объем малого элемента бруска), одной и той же величины (заданной углом). Вдоль бруска различаются относительные направления сдвиговых сил и сторон выбранных квадратов. Однако в однородном изотропном материале все эти случаи эквивалентны: связь деформаций и напряжений во всех случаях описывается одними и теми же формулами.

Однако неоднородность деформации в описанном случае влияет на угол отклонения лишь в следующем порядке малости – так что при решении задачи ею можно пренебречь.

Добавление.

В условии задачи сказано, что брусок под действием растягивающей пары сил сжимается в поперечном направлении, а под действием сжимающей – утолщается (то есть коэффициент Пуассона положителен). На самом деле это не всегда так. Известны материалы (они называются *ауксетики*), которые под действием сжимающей пары сил сжимаются (а под действием растягивающей – растягиваются) одновременно в продольном и в поперечном направлениях. Такими свойствами обладают: бумага, алмаз, некоторые минералы (например, пирит), многие кристаллы (в их числе Li, Na, K, Cu), органические цепные молекулы, а также ряд других материалов. Однако следует заметить, что все перечисленные материалы являются анизотропными (то есть их свойства зависят от ориентации образца относительно приложенных сил), в то время как в условии задачи материал предполагается изотропным.

Задача №3.

Оценим сначала длину свободного пробега молекул в воздухе, через который летит спутник. Как известно³, эта величина имеет порядок

$$\lambda \sim \frac{1}{\pi n d^2}$$

где n – концентрация молекул в газе, $d \sim 10^{-10}$ м – характерный размер молекулы. Концентрацию найдем с помощью известного соотношения $p = nkT$ (p – давление газа, T – его абсолютная температура, $k \approx 1,38 \times 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана). Если вы не помните значения постоянной Больцмана – ее можно вычислить как отношение универсальной газовой постоянной к числу Авогадро. Для воздуха, через который летит спутник, эти формулы дают

$$n = \frac{p}{kT} \approx 5,6 \times 10^{15} \text{ м}^{-3}, \quad \lambda \sim \frac{1}{\pi n d^2} \sim 6 \times 10^3 \text{ м}$$

Как видим, длина свободного пробега в этих условиях имеет порядок нескольких километров, что много больше размера спутника $l \sim 1$ м. Это означает, что никаких макроскопических потоков воздуха, обтекающих спутник при его движении, не возникает – спутник просто сталкивается с отдельными молекулами газа, каждая из которых вплоть до столкновения «ничего не знает» о его приближении и движется так, как если бы никакого спутника не было.

Оценим теперь скорость, с которой движутся молекулы (в системе отсчета покоящегося воздуха). Как известно из школьного курса, среднеквадратичная скорость теплового движения молекул в равновесном газе равна

$$V_{\text{КВ}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

(m – масса молекулы, M – молярная масса газа, R – универсальная газовая постоянная). Подставив в последнюю формулу $M \approx 0,029$ кг/моль (средняя молярная масса воздуха), $R = 8,31$ Дж/(моль \times К), $T = 1300$ К (температура воздуха на высоте орбиты), получаем $V_{\text{КВ}} \approx 1000$ м/с. Это намного меньше первой космической скорости $v_I \approx 8000$ м/с (скорости спутника на низкой околоземной орбите). Значит, при оценке силы сопротивления можно вообще не учитывать тепловое движение и считать, что спутник налетает на неподвижно висящие в пространстве молекулы.

Дальнейшее уже несложно. Площадь поперечного сечения спутника имеет порядок квадрата его линейного размера: $S \sim l^2$. За время Δt он столкнется с молекулами, находящимися в объеме $\Delta V = Sv_I \Delta t \sim l^2 v_I \Delta t$. Число этих

³См., например, Бутиков Е.И., Быков А.Л., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах, Раздел V.

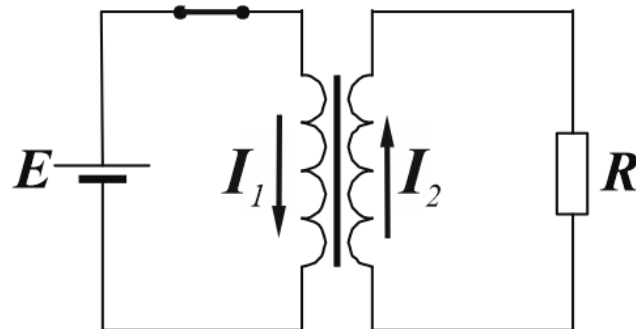
молекул $\Delta N = n\Delta V \sim nl^2v_I\Delta t$. Если для оценки предположить, что передняя поверхность спутника перпендикулярна его скорости и считать столкновения молекул с ним абсолютно упругими (что в реальности далеко не так, но для оценки такая модель годится), то каждая первоначально покоившаяся молекула в результате удара приобретет скорость $2v_I$, направленную так же, как скорость спутника. Значит, за это время спутник передаст молекулам импульс $\Delta P = 2mv_I\Delta N \sim 2mnl^2v_I^2\Delta t$. Средняя тормозящая сила будет равна

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \sim 2mnl^2v_I^2 = 2\frac{M}{N_A}nl^2v_I^2.$$

Подставив в эту формулу численные данные, получаем $F \sim 0,03H$.

Задача №4.

а) Обозначим силу тока в первичной обмотке через I_1 , а во вторичной – через I_2 . Положительные направления для этих токов выберем так, как показано на рисунке. Пусть $\Phi(t)$ – магнитный поток через каждую из обмоток (по условию они одинаковы). Напряжение на каждой обмотке будет равно ЭДС индукции в ней, а эта ЭДС по закону электромагнитной индукции равна производной магнитного потока по времени. Имеем:



$$U_1 = E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$U_2 = I_2R = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Отсюда видно, что на вторичной обмотке после замыкания ключа возникнет постоянное напряжение, равное ЭДС батарейки E , а поскольку это напряжение приложено к резистору R , в ее цепи будет течь постоянный ток, равный

$$I_2 = \frac{E}{R}.$$

Этот ток возникнет скачком в момент замыкания ключа. Соответственно, мгновенно возникнет магнитный поток $\Phi_2 = LI_2$, создаваемый в сердечнике трансформатора вторичной обмоткой. Однако полный магнитный поток не может меняться скачком, это запрещают закон электромагнитной индукции

и правило Ленца. Сразу после замыкания ключа он должен остаться таким же, каким был до замыкания, то есть нулевым. Значит, в этот момент должен возникнуть ток I_0 в первичной обмотке, причем такой, чтобы его вклад в полный поток скомпенсировал вклад тока I_2 :

$$\Phi(t = 0) = LI_2 - LI_0 = 0$$

Знак в этой формуле соответствует выбранным нами положительным направлениям токов в обмотках. Как видим, начальный ток в первичной обмотке $I_0 = I_2 = E/R$. Дальнейшая эволюция этого тока определяется законом электромагнитной индукции:

$$E = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI_2 - LI_1(t)) = L\frac{dI_1}{dt}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{E}{L} \implies$$

$$I_1(t) = I_0 + \frac{E}{L}t = \frac{E}{R} + \frac{E}{L}t$$

б) В момент размыкания ключа ток в первичной обмотке обратится в ноль. Ток во вторичной скачкообразно изменится. Его новое значение I опять-таки определит условие непрерывности полного магнитного потока:

$$LI_2 - LI_1(\tau) = LI$$

Отсюда получаем: $I = -(E/L)\tau$. Поскольку цепь первичной обмотки уже разомкнута, вторичная обмотка дальше работает просто как катушка индуктивности, замкнутая на резистор. При затухании тока в этой цепи на резисторе в виде тепла выделится полная электромагнитная энергия катушки:

$$Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{E^2\tau^2}{2L}$$

Задача №5.

а) Наименьшую температуру плавления имеет сплав эвтектического состава. По диаграмме находим эвтектическую концентрацию цинка в сплаве: $n_E \approx 0,175$. Необходимая масса кадмия определяется простым уравнением:

$$\frac{M_{Zn}}{M_{Zn} + M_{Cd}} = 0,175,$$

из которого находим: $M_{Cd} \approx 4,7M_{Zn} = 4,7$ кг.

б) Концентрация цинка в исходном сплаве равна $n = 0,8 / (0,8 + 0,2) = 0,8$. Найдем на диаграмме точку, соответствующую конечному состоянию ($n = 0,8$; $t = 350^\circ\text{C}$). Она находится между линиями солидуса и ликвидуса, в области $Zn_{ТВ} + \text{жидкость}$. Концентрацию цинка в жидкой фазе в этой точке даст точка пересечения горизонтальной прямой $t = 350^\circ\text{C}$ и линии ликвидуса. Это следует из того, что при дальнейшем понижении температуры из этой фазы начнет кристаллизоваться цинк, а значит, ее состав соответствует точке на линии ликвидуса. По диаграмме находим эту концентрацию: $n_{\text{ж}} \approx 0,5$. Как видим, в жидкой фазе оставшийся цинк составляет половину полной массы, то есть его масса равна массе кадмия $0,2$ кг. Значит, к этому моменту кристаллизовалась масса цинка $\Delta M_{Zn} \approx 0,8 - 0,2 = 0,6$ кг.

в) Поскольку концентрации солей в морской воде намного меньше эвтектических, при понижении температуры кристаллизоваться (при температуре несколько ниже 0°C) начнет именно вода. Оставшиеся соли будут вытесняться в более глубокие (незамерзшие) слои океана, а образующийся лед будет пресным. Температура -10°C лежит выше эвтектических температур солей, поэтому до образования эвтектики дело в этом случае не дойдет. Подобная картина будет иметь место, если замерзание воды происходит в идеальных условиях – в сосуде, где она находится в полном покое (нет потоков жидкости), при охлаждении сверху. Однако в реальном океане условия совсем другие – там дует ветер, приводящий к образованию волн. Эти волны взламывают тонкую корку образовавшегося льда и перемешивают ее осколки с морской водой. Из-за этого часть соленой воды остается в толще образовавшегося (пресного) льда в виде небольших жидких капель очень крепкого рассола. Северным народам прекрасно известна эта особенность морского льда. Для приготовления питьевой воды такой лед не годится – при его растапливании соляные включения попадают в образующуюся воду, которая в результате оказывается соленой. А вот многолетний морской лед, оказывается, дает при растапливании вполне пресную воду. В процессе многократных циклов нагревания (летом) – охлаждения (зимой), частичного подтаивания, соляные включения из него «выдавливаются» и возвращаются в океан.