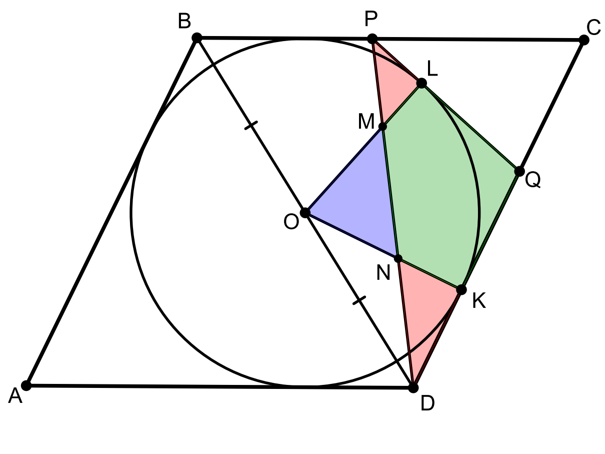
Задача 1. У Коли есть квадратный трёхчлен x^2+ax+b. На одной стороне бумажки он написал его корни, а с другой стороны этой же бумажки — его коэффиценты a и b. Оказалось, что все написанные числа являются целыми и отличными от нуля. Затем он отдал эту бумажку Оле, которая, посмотрев на бумажку, сказала, что Коля скорее всего ошибся, так как на обеих сторонах бумажки написаны одни и те же чилса, чего явно не может быть. Определите действительно ли ошибся Коля или, если он всё-таки всё сделал правильно, то какие числа написаны на бумажке?

Ответ. Коля не ошибся. На бумажке были написаны числа **1** и $-\mathbf{2}$ с обеих сторон.

Решение. Действительно, несложно проверить, что у уравнения x^2+x-2 корни это чилса 1 и -2. Тогда решая такое уравненеие Коля с обеих сторон бумажки бы написал одну и ту же пару чисел.

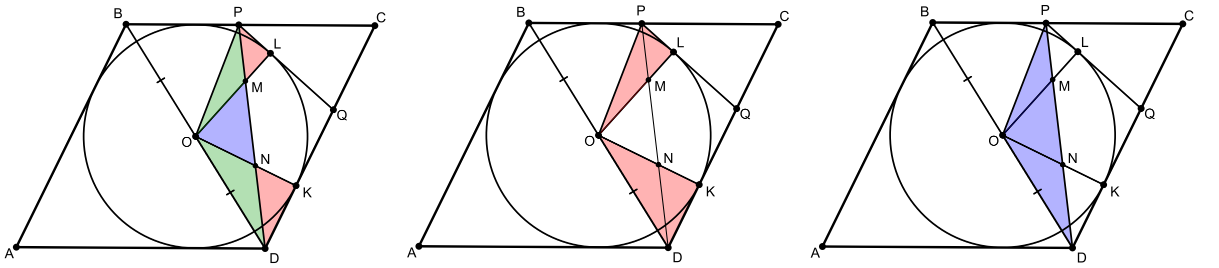
Покажем, что ничего другого на бумажке написано быть не могло. Чтобы Коля всё сделал правильно с обеих сторон бумажки должны быть написаны числа a и b. Значит, a и b — суть корни уравнения $x^2+ax+b=0$. Подставляя b в это уравнение получаем равенство $b^2+ab+b=0$, которое можно сократить на b, так как все числа на бумажке ненулевые. Получаем $a+b=-1$. Но $a+b$ по теореме Виета равно $-a$, следовательно $a=1$. Откуда подставляя его в полученное ранее равенство находим $b=-2$.

Задача 2. В ромб $ABCD$ вписана окружность ω с центром O. Точки P и Q выбраны на сторонах BC и CD соответственно таким образом, что PQ касается ω в точке L. Обозначим точку касания ω со стороной CD через K. Докажите, что площадь треугольника PQD равна площади четырёхугольника $OLQK$.

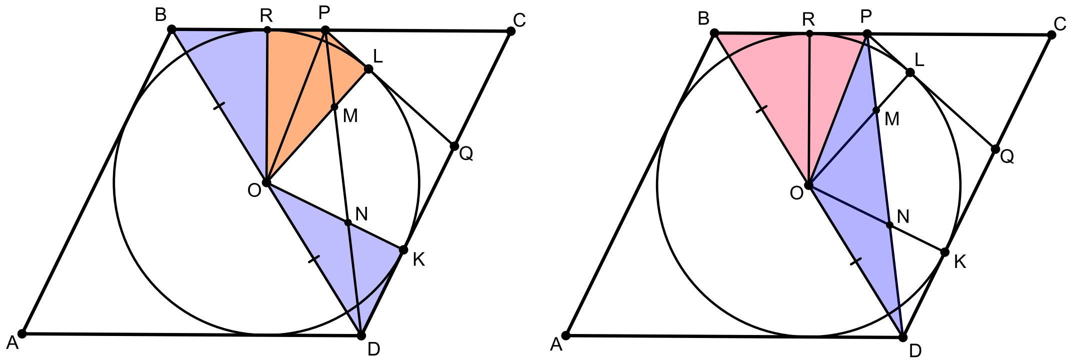


Решение. Для начала заметим, что центр окружности ромба совпадает с центром самого ромба, а значит, является серединой диагонали BD. Теперь отметим точки пересечения отрезков OL и OK с отрезком DP: точки M и N соответственно. Тогда вычитая из обеих площадей площадь пятиугольника $NMLQK$ получаем, что нужное нам равенство площадей эквивалентно равенству $S_{PML}+S_{NKD}=S_{OMN}$.

Добавим теперь к обеим частям равенства площади треугольников OPM и OND. Получим, что теперь наше равенство выглядит следующим образом $S_{OPL}+S_{OKD}=S_{OPD}$.



Теперь отметим точку R касания вписанной в ромб окружности со стороной BC. В силу симметрии относительно диагонали AC треугольники OKD и ORB равны. А в силу симметрии касательных относительно прямой OP равны треугольники OPL и OPR (OP очевидно является биссектрисой угла между касательными и $PR = PL$). Тогда наше равенство переходит в следующее $S_{OPD} = S_{OPL} + S_{OKD} = S_{OPR} + S_{ORB} = S_{OBP}$. Но площади этих треугольников равны, так как медиана треугольника BPD делит его на два равновеликих.



Задача 3. В классе учится 36 человек. Каждое утро заходя в класс некоторые из них в качестве приветствия жмут друг другу руки, причём никто никому не жмёт руку за день более одного раза. В один из дней оказалось, что никакие двое учеников, которые сделали одинаковое количество рукопожатий, не жали руку друг другу. Какое максимальное число рукопожатий могло быть совершено в этот день?

Ответ: 546.

Решение. Заметим, что если в классе ровно 1 человек, который поздоровался со всеми остальными, двое, тех, кто поздоровались со всеми остальными, но не друг с другом, трое тех, кто поздоровался со всеми остальными, но не друг с другом, …, 8 человек, которые пожали руку всем остальными, кроме как между собой, то будет ровно 556 рукопожатий. Действительно, во-первых, $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$, так что группы такого размера возможны. Во-вторых, в каждой группе каждый ребёнок сделал одинаковое число рукопожатий, а дети из разных групп — разное. Но дети из одной группы как раз не жали друг другу руки, а значит условие задачи выполнено. Наконец, если построить граф знакомств на этих детях, то от полного графа его будет отличать отсутствие внунтренних ребёр в каждой группе. То есть всего рёбер будет $36 \cdot 35/2 - 1 \cdot 2/2 - 2 \cdot 3/2 - 3 \cdot 4/2 - 4 \cdot 5/2 - 5 \cdot 6/2 - 6 \cdot 7/2 - 7 \cdot 8/2 = 18 \cdot 35 - 1 - 3 - 6 - 10 - 15 - 21 - 28 = 630 - 84 = 546$.

Докажем, что не может быть больше k людей, совершивших ровно $36 - k$ рукопожатий. Допустим обратное, то есть что имеется хотя бы $k+1$ человек, сделавший ровно $36 - k$ рукопожатий. Рассмотрим одно из них. Кроме него имеется всего 35 человек в классе, при этом он совершил $36-k$ рукопожатий и есть ещё k человек, который сделали ровно столько же рукопожатий. Тогда по принципу Дирихле, так как $(36-k)+k > 35$ найдётся человек, совершивший столько же рукопожатий, и которому он жал руку, что противоречит условию задачи.

Из доказанного утверждения легко понять, что приведённый пример является оптимальным. Докажем строго это утверждение. Для этого упорядочим всех школьников по количеству рукопожатий, которые они совершили, и обозначим количество рукопожатий первого из них (т. е. того, кто совершил максимальное количество рукопожатий) за a_1, следующего по количеству — за a_2 и т. д. Тогда $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{36}$ — количества рукопожатий, совершённые школьниками нашего класса. Заметим, что $a_1 \leq 35$, просто потому что больше, чем 35 рукопожатий совершить невозможно. Причём, если $a_1 = 35$, то $a_2 \leq 34$ по утверждению, доказанному ранее. Далее получаем, что a_2 и a_3 не больше, чем 34, причём $a_4 \leq 33$, так как если бы a_3 было равно хотя бы 34, то и a_2, a_3 тоже были бы равны 34, а таких людей по доказанному утверждению может быть не более, чем 2. Аналогично можно доказать, что $a_4, a_5, a_6 \leq 33$ и $a_7 \leq 32$, и т. д. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{36} \leq 35 + 34 + 34 + 33 + 33 + 33 + \ldots + \underbrace{28 + 28 + \ldots + 28}_{8 \text{ раз}}$.

Но сумма, стоящая справа, равна сумме степеней вершин графа из примера, приведённого выше, а она в два раза больше количества рёбер в графе (так как сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству его рёбер).

Задача 4. Назовём число n *волшебным*, если оно делит число $(n-1)! \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$. Найдите все волшебные числа n в промежутке от 10 до 100.

Ответ: Все числа от 10 до 100 кроме 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86, 94. **Решение.** Докажем, что в общем случае при $n > 9$ не являются волшебными чилса только вида $n = 2p$, где p — простое. Для этого разберём три случая: когда n является простым, когда $n/2$ является простым, и когда ни n, ни $n/2$ не являются простыми (в частности, если n нечётно, то $n/2$ не является простым).

Первый случай. Если n является простым. Рассмотрим выражение $(n-1)! \times \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right) = (n-1)! + \frac{(n-1)!}{2} + \ldots + \frac{(n-1)!}{n-1}$ по модулю n. Утверждается, что среди слагаемых в этой сумме встретятся все возможные ненулевые остатки по модулю n. Так как различных ненулевых остатков по модулю n ровно $n-1$ и слагаемых столько же достаточно показать, что все слагаемые дают различные остатки по модулю n. Это действительно так, потому что в противном случае для некоторы a и b такхи, что $1 \leq a < b \leq n-1$ было бы верно сравнение $\frac{(n-1)!}{a} \equiv \frac{(n-1)!}{b} \pmod{n}$. Но перенеся в этом сравнении всё в левую часть получаем $\frac{(n-1)!}{a} - \frac{(n-1)!}{b} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (a-1) \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) - 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (b-1) \cdot (b+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (a-1) \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (b-1) \cdot (b+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (b-a) \equiv 0 \pmod{n}$, что невозможно, так как все множители в произведении не делятся на n, а n — простое. Полученное противоречие доказывает, что слагаемые являются всеми возможными остатками по модулю n, а значит, им сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$, то есть кратна n, так как n простое, большее 9, а следовательно, нечётно.

Второй случай. Если $n/2$ является простым. Обозначим $n/2$ через p, тогда $n = 2p$. Заметим, что среди чисел от 1 до $n-1$ есть только одно, кратное p: это само число p. Тогда при раскрытии скобок в выражении $(n-1)! \times \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$ все слагаемые кроме $(n-1)! \times \frac{1}{p}$ будут кратны p, а это слагаемое — не будет. Значит, и вся сумма не будет кратна p, а следовательно, и $2p$, то есть n. Значит, в этом случае чилло магическим не является.

Третий случай. Если ни n, ни $n/2$ не являются простыми. В этом случае n можно представить в виде произведения (т. к. n непростое), причём оба множителя будут больше 2 (так как либо n, поделённое на любой нечётный простой делитель будет больше двойки, либо n — степень двойки, но в силу $n > 9$, степень двойки хотя бы четвёртая и значит $n = 4 \cdot \frac{n}{4}$, где оба множителя больше 2). То есть для некоторых $a, b > 2$ верно $n = a \cdot b$. Тогда раскрывая скобки в выражении $(n-1)! \times \left(1+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$ получаем слагаемые вида $(n-1)! \cdot \frac{1}{c}$, где $c \neq a, b$, и два слагаемых $(n-1)! \cdot \frac{1}{a}$, $(n-1)! \cdot \frac{1}{b}$. Во всех слагаемых первого вида в произведении $(n-1)!$ содержатся множители a, b и c, а значит, после сокращения на c, оставшееся произведение будет делиться на $ab = n$. Теперь заметим, что $2a < ab = n$. Тогда в случае $2a \neq b$, что во втором слагаемом в произведении $(n-1)!$ содержатся различные множители a, $2a$, b, а значит, после сокращения на a останется произведение $2a \cdot b = 2n$, кратное n. Если же $2a = b$, то $n = 2a^2$, но тогда число $3a < n$ и $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \frac{1}{a} = 6a^2$ кратно n. Аналогично доказыается, что последнее, третье слагаемое, кратно n, а значит, число является магическим, так как все слагаемые кратны n.

Осталось заметить, что числами, для которых их половина является простым числом, являются те и только те, что перечислены как исключённые в ответе.

Задача 5. Существует ли множество натуральных чисел A, для которого выполнены следующие свойства: всевозможные суммы двух элементов из A уникальны (т. е. не бывает двух различных пар элементов, у которых суммы одинаковы), и при этом среди этих сумм можно найти 2020 подряд идущих натуральных чисел.

Ответ: существует.

Решение. Докажем существование такого множества по индукции по n, количеству подряд идущих натуральных чисел, являющихся суммами каких-то двух из множества A. То есть будем доказывать, что для каждого натурального n существует такое множество натуральных чисел A, что всевозможные суммы двух его элементов уникальны, и при этом среди них можно найти n подряд идущих натуральных чисел.

База. $\mathbf{n=2}$. В качестве примера можно взять множество $A = \{3,5,6\}$. Тогда множество его всевозможных попарных сумм представляет из себя $B = \{8,9,11\}$ и содержит $mathbf2$ подряд идущих чилса 8 и 9.

Переход. $\mathbf{n \to n+1}$. Пусть множество A уже удовлетворяет условию задачи и при этом в множестве B его всевозможных попарных сумм содержится как минимум n подряд идущих натуральных чисел (обозначим первое из них через b). Если в нём же содержится и $n+1$ подряд идущее натуральное число, то переход уже доказан. Поэтому будем считать, что $n+1$ подряд идущего числа в B нет.

Пусть максимальный элемент в B равен c. Заметим, что c больше всех элементов из A. Ообозначим через A^+ множество элементов A, увеличенных на c каждое. Рассмотрим множество A' состоящее из элементов A^+ и элементов $p = 1$ и $q = 2c+b+n-1$. Тогда множество B' всевозможных сумм из двух элементов множества A' будет состоять из 4 частей: попарные суммы элементов A^+, суммы вида $p+$ элемент из A^+, сумм вида $q+$ элемент из A^+, суммы $p+q$. Все элементы первой части являются просто на $2c$ увеличенными элементами множества B. Поэтому они все различны между собой, и среди них есть все числа от $b+2$ до $b+2c+n-1$ включительно. Более того, они все больше 2 и меньше 3. Все элементы из второй части меньше $2c$ (так как максимальный элемент из A меньше c, то максимальный элемент из A^+ сторого меньше $2c$), а значит, не пересекаются с элементами первой части. Все элементы из третьей части больше $3c$, а значит не пересекаются с элементами первой и второй частей. Наконец, единственный элемент четвёртой части равен $2c+b+n$, которого нет в элементах первой части (так как в B было только ровно n подряд идущих чисел с b до $b+n-1$ и не было элемента

$b+n)$, нет в элементах второй части, так как он больше 2 и нет в элементах третьей части, так как все они больше, чем $q+c$. Тем самым переход доказан и доказательство завершено.

Утверждение индукции для $n = 2020$ эквивалентно задаче.

Решение 2. Приведём явный пример. Рассмотрим числа вида $a_1 = x$, $b_1 = c - b + 1$, $a_2 = x^2$, $b_2 = c - x^2 + 2$, $a_3 = x^3$, $b_3 = c - x^3 + 3$, $\ldots$, $a_k = x^k$, $b_k = c - x^k + k$, $\ldots$, $a_{2020} = x^{2020}$, $b_{2020} = c - x^{2020} + 2020$, где $x = 10$, а $c = 6 \cdot 10^{2020}$. Тогда очевидно суммы вида $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $\ldots$, $a_{2020} + b_{2020}$ равны $c+1$, $c+2$, $\ldots$, $c+2020$, то есть образуют 2020 подряд идущих чисел. Осталось доказать, что среди попарных сумм пирведённых чисел нет совпадающих.

Разделим все суммы на три вида: первый вид $a_n + a_k = x^n + x^k$, второй вид $a_n + b_k = c + x^n - x^k + k$, третий вид $b_n + b_k = 2c - x^n - x^k + n + k$. Для начала, докажем, что суммы из двух разных видов не равны между собой. Предположим, что число второго вида и третьего вида равны между собой. Тогда для некоторых n, k, l, m будет выполнено $a_n + b_k = c + x^n - x^k + k = b_n + b_k = 2c - x^l - x^m + l + m = b_l + b_m$. Перенося в этом равенстве все слагаемые без c влево и оставляя справа только c $(2c - c = c)$ заметим, что c больше, чем сумма модулей всех остальных слагаемых, а значит, равенства быть не может. Аналогично доказывается, что числа первого вида не могут быть равны числам второго и третьего видов.

Теперь докажем, что суммы из одного вида тоже отличаются друг от друга. Приведём доказательство для сумм третьего вида, для двух других видов доказательства будут аналогичны. Пусть есть $n \geq k$ и $m \geq l$ такие, что пара чисел (n, k) не совпадает с парой (m, l). Докажем, что не может быть равенства $b_n + b_k = b_m + b_l$. Дейтсвительно, если так, то после подставновки получаем равенство $-x^n - x^k + n + k = -x^m - x^l + m + l$. Если $n \neq m$, то без ограничения общности можно считать, что $n > m$, но тогда x^n по модулю больше, чем все суммма модулей остальных 7 слагаемых в равенстве, а значит, равенства быть не может. Если $n = m$, то после сокращения равных слагаемых остаётся равенство $-x^k + k = -x^l + l$, причём в этом равенстве $k \neq l$, так как изначальные пары были различны. Но тогда опять же не умаляя общности будет выполнено, что $k > l$ и $-x^k$ по модулю будет больше, чем сумма модулей всех остальных членов у равнении, что невозможно. Следовательно, все суммы третьего вида различны между собой. Заметим, что при доказательстве того, что попарные суммы различны внутри второго типа нужно отдельно рассмотреть случаи, когда $n = k$ и $m = l$, они будут образовывать наши подряд идущие числа, а следовательно, все различны. Во всех остальных случаях соображение о том, что какое-то слагаемое по модулю будет больше, чем сумма модулей остальных по-прежнему работает.