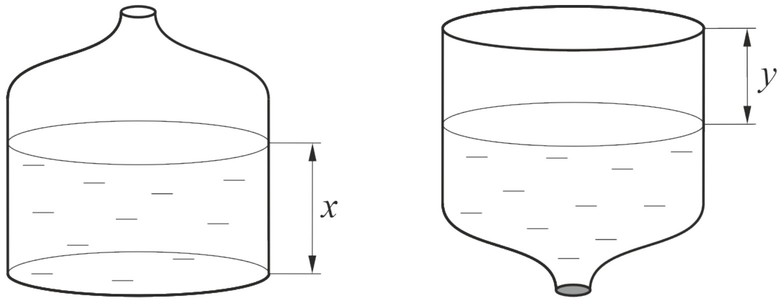
Задача №1.



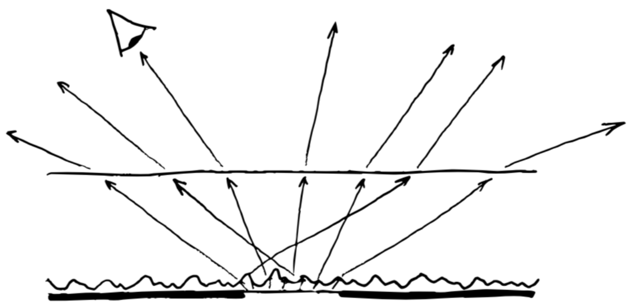
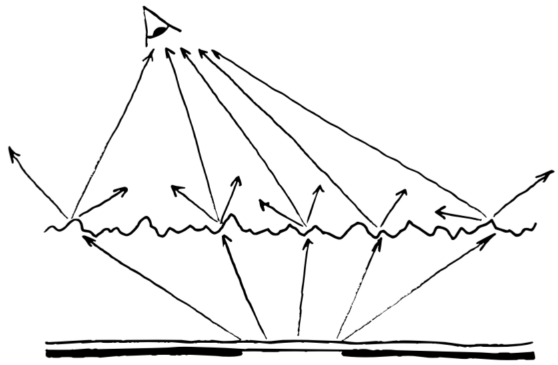
Проблема состоит в том, как определить объем пустой (незаполненной водой) части бутылки. Бутылка в этой части сужается к горлышку, ее стенки имеют сложную форму, поэтому простые измерения линейкой тут не помогут. Сделаем так: сначала измерим высоту уровня воды от дна сосуда x. Тем самым мы узнаем, какая высота цилиндрической части бутылки соответствует объему 1 л. Затем заткнем бутылку (например, пальцем) и перевернем ее вверх дном. Поскольку бутылка заполнена более, чем наполовину, уровень воды снова окажется в ее цилиндрической части. Измерим расстояние между этим уровнем и дном бутылки y. Поскольку объем цилиндра пропорционален его высоте, объем пустой части можно будет вычислить как $(y/x) \times 1$ л. А объем всей бутылки тогда будет равен

$$V = 1\text{л} + (y/x) \times 1\text{л}.$$

Задача №2.

Казалось бы, что для получения ответа на вопрос задачи достаточно разделить расстояние, с которого строители приволокли камень, на расстояние между бревнами. Однако камень не просто "едет" по бревнам, бревна в процессе движения тоже катятся вперед. Заметим, что если бревно не проскальзывает ни по земле, ни по камню, то скорость нижней точки бревна относительно земли равна нулю, а у верхней точки она равна скорости камня. Значит, скорость центра бревна (скорость, с которой перемещается бревно) в два раза меньше скорости камня. Если камень сдвинется на 1 метр, бревна прокатятся по земле 1/2 метра. Таким образом, чтобы из-под камня сзади выкатилось бревно, он должен сдвинуться вперед не на 1 метр, а на 2 метра. Значит, строителям приходилось перетаскивать бревно каждые два метра перемещения камня или всего $30000/2 = 15000$ раз.

Задача №3.

Для простоты представим себе, что вместо текста стекло положили на страницу, на которой светится одно небольшое пятнышко, свет от него расходится во все стороны. Если положить стекло на пятнышко матовой стороной вниз, то свет от пятнышка сразу попадет на неровную поверхность стекла и продолжит расходиться во все стороны (см. рисунок). На выходе из стекла лучи преломятся, но только некоторые попадут в глаз. В результате, мы увидим маленькое светящееся пятнышко там, куда указывает направление этих попавших в глаз лучей. Если же положить стекло матовой стороной вверх, что лучи, расходящиеся от пятнышка попадут на эту поверхность в разных точках (они успели разойтись, пока шли сквозь толщу стекла) и вместо того, чтоб преломиться обычным образом, начнут расходиться со все стороны из всех точек поверхности, на которые они попали. Из рисунка следует, что свет, который при этом попадет в наш глаз, будет идти под в самых разных направлениях. То есть, в этом случае мы увидим не маленькое пятнышко, а большое расплывчатое пятно. Если каждая точка лежащего под стеклом текста будет видна нам как крупное пятно, текст будет размытым и прочитать его будет сложно.

Задача №4.

Для начала введем обозначения: силу тяги моторного вагона обозначим F, силу натяжения сцепки между 2 и 3 вагоном T_1 , а силу натяжения между 3 и 4 — T_2 . (Если T_2 окажется отрицательной, это будет означать, что сцепка сжата). Массу одного вагона обозначим m, ускорение — a. Т.к. поезд едет как единое целое, у всех вагонов значение ускорения одно и то же.

Теперь будем объединять соседние вагоны в «группы» и применять к этим группам второй закон Ньютона. Действительно, ведь если все вагоны ускоряются одинаково, то такую «группу» можно рассматривать как одно тело. Силы сжатия/растяжения сцепки между вагонами группы в таком случае будут внутренними и не войдут во 2-й закон Ньютона.

Запишем этот закон для группы из 1-го и 2-го вагонов. Вперед эту группу тянет сила F, назад — T_1 . Т.е. $2ma = F - T_1$. Теперь рассмотрим группу из 4-го и 5-го вагонов, не нее действуют силы F и T_2 (обе — вперед), тогда $2ma = F + T_2$. Из полученных равенств получаем: $T_2 = -T_1$. Это означает, что сцепка между 3-м и 4-м вагонами сжата с силой 5000Н.

Чтобы найти силу тяги моторного вагона, возьмем в качестве группы весь поезд. На него действуют только две внешние силы — тяга 2-го и 4-го вагонов, т.е. $5ma = 2F$. Выразив отсюда произведение ma и подставив его в первое равенство, получаем: $F = 5T_1 = 25$кН.

Задача №5.

Вася не учитывает, что кроме того, что шарик во втором сосуде тянет дно вверх, он (в обоих сосудах) поднимает уровень воды, вытесняя ее и тем самым увеличивая давление у дна. При этом в первом сосуде он полностью погружен в воду, а во втором — только частично, поскольку там он плавает на поверхности воды. Значит, уровень воды в первом сосуде будет расположен выше, чем во втором. Можно показать (попробуйте сами это сделать), что сила давления воды на дно в этом сосуде тогда оказывается больше, чем во втором ровно на величину силы натяжения нити, тянущей его дно вверх. Таким образом, полные силы, действующие на донья сосудов, оказываются совершенно одинаковыми.

Маша показала этот факт с помощью гораздо более простого рассуждения.

Задача №6.

а) В этом случае найти максимальную температуру холодной воды на выходе достаточно просто. Эта вода, протекая через теплообменник, будет нагреваться до тех пор, пока ее температура не сравняется с температурой горячей воды (в том же месте). Значит, если сделать теплообменник очень длинным (чтобы это равновесие было достигнуто), на его выходе обе воды будут иметь одну и ту же температуру t. Найдем ее с помощью уравнения теплового баланса. За 1 с во внутреннюю трубу входит 1 л (1 кг по массе) воды температурой 80°C, а выходит такое же количество воды температурой t. Если тепловые процессы в теплообменнике установились (температуры в каждой точке перестали меняться со временем), то вода в этой трубе должна потерять за это время количество тепла, равное $c \times 1\text{кг} \times (80^\circ - t)$ Дж (c — удельная теплоемкость воды). Аналогично, вода, текущая в зазоре между трубами, должна получить $c \times 2\text{кг} \times (t - 20^\circ)$ Дж тепла. Тогда по уравнению теплового баланса

$$c \times 1 \text{ кг} \times (80^\circ - t) = c \times 2 \text{ кг} \times (t - 20^\circ),$$

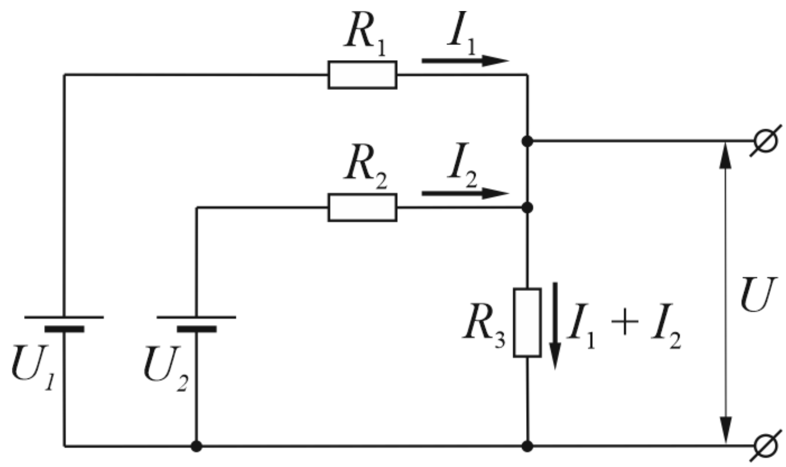
откуда получаем $t = 40$°C.

б) В случае теплообменника со встречными потоками будем рассуждать следующим образом. В этом устройстве холодная вода на выходе имеет тепловой контакт с горячей водой на входе, поэтому, в принципе, может нагреваться до ее температуры 80°С. Аналогично, горячая вода может остывать до входной температуры холодной воды (20°С). Однако, конечные температуры той и другой воды связаны уравнением теплового баланса. Допустим, холодная вода нагревается до температуры t_1, а горячая остывает до температуры t_2. Тогда

$$c \times 1\ \text{кг} \times (80^\circ - t_2) = c \times 2\ \text{кг} \times (t_1 - 20^\circ).$$

Из этого уравнения видно, что горячая вода в таком теплообменнике всегда остывает (изменяет свою температуру) вдвое сильнее, чем нагревается холодная. Максимально возможные изменения температур у них одинаковые — 60°С, однако, если мы будем неограниченно удлинять трубу теплообменника, горячая вода первой достигнет этого предела. Когда t_2 станет практически равна 20°С, дальнейшее удлинение теплообменника перестанет изменять выходные температуры. Легко видеть, что уравнение теплового баланса дает для этой ситуации $t_1 = 50$°С. Это и есть максимальная температура холодной воды на выходе такого устройства.

Задача №7.



а) Одна из простейших реализаций нужной цепи состоит всего из трех резисторов (см. рисунок). Покажем, что эта схема дает нужный результат «вычисления» и найдем значения сопротивлений резисторов, при которых это происходит. Обозначим токи, текущие через резисторы R_1 и R_2 как I_1 и I_2. Ток через резистор R_3 тогда, очевидно, будет равен I_1+I_2 (током, утекающим на выход, по условию можно пренебречь). Поскольку выходное напряжение U, которое должно давать устройство в этом пункте, много меньше U_1 и U_2, можно считать, что входные напряжения полностью приложены к резисторам R_1 и R_2. Тогда по закону Ома

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{U_2}{R_2},$$

а выходное напряжение

$$U = R_3(I_1 + I_2) = \frac{R_3}{R_1}U_1 + \frac{R_3}{R_2}U_2.$$

Сравнивая эту формулу с условием, видим, что наша цепь даст нужное значение напряжения, если отношения сопротивлений в ней будут равны

$$\frac{R_3}{R_1} = 0,001, \qquad \frac{R_3}{R_2} = 0,002.$$

Сами значения сопротивлений выберем из следующего соображения. В наших вычислениях мы нигде не учитывали внутренние сопротивления источников напряжений U_1 и U_2. Эти сопротивления неизвестны, известен лишь порядок их величин — несколько ом. Значит, их действительно можно будет не учитывать, если $R_1, R_2 \gg 1$Ом. По условию погрешность «вычисления» должна быть не больше 1%. Это требование заведомо будет выполнено, если значения R_1 и R_2 будут порядка 1 кОм. Легко видеть, что нужные отношения сопротивлений получатся, если взять, например:

$$R_1 = 2\text{кОм}, R_2 = 1\text{кОм}, R_3 = 2\text{Ом}.$$

б) В этом случае не удастся при вычислении токов пренебречь падением напряжения на резисторе R_3. Запишем точные уравнения для напряжений:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_2) \\ U_2 &= R_2 I_2 + R_3(I_1 + I_2) \\ U &= R_3(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

Выразив из первых двух уравнений I_1 и I_2 и подставив их в третье уравнение, получаем:

$$U = \frac{R_2 R_3 U_1 + R_1 R_3 U_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

Сравнивая эту формулу с условием, видим, что для получения нужного выходного напряжения необходимо, чтобы

$$\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = 0,1$$

$$\frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = 0,2$$

Из этих уравнений находим отношения сопротивлений:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{1}{7}, \frac{R_3}{R_2} = \frac{2}{7}$$

Как и в первом случае, чтобы внутренние сопротивления источников не влияли на результат «вычисления», сопротивления резисторов должны быть порядка 1 кОм. Для получения нужных отношений можно взять, например:

$$R_1 = 2\text{кОм}, R_2 = 1\text{кОм}, R_3 = \frac{2}{7}\text{кОм}.$$

Задача №8.

Лампа накаливания является сильно нелинейным элементом: в зависимости от температуры у нее меняются и сопротивление нити, и рассеиваемая мощность. Допустим, что колебания температуры малы, тогда сопротивление нити можно считать постоянными. Мощность, потребляемая лампой, осциллирует с частотой, равной удвоенной частоте напряжения — потому что она пропорциональны квадрату напряжения сети $U^2(t) \sim cos^2(\omega t) \sim 1{+}cos(2\omega t)$. Период ее колебаний, таким образом, равен $T = 0,01$ с. За это время мгновенная мощность падает от максимального значения до нуля и снова возрастает до максимума. Оценим, за какое время τ нить накаливания остынет от рабочей температуры до комнатной, если выключить ток через нее. Заметим, что в установившемся режиме работы средняя мощность излучения лампы, очевидно, равна средней мощности, потребляемой от сети $N = 100$ Вт. Будем считать, что после выключения тока нить накаливания излучает энергию с постоянной мощностью, равной средней мощности N. На самом деле это, конечно, не так — мощность теплового излучения зависит от температуры и резко падает при остывании нити. Но — мы делаем оценку порядка величины. Напишем уравнение теплового баланса:

$$cm\Delta t = N\tau$$

Здесь c — удельная теплоемкость вольфрама, $m = \rho\frac{\pi d^2}{4}l \approx 1 \times 10^{-6}$ кг — масса нити, $\Delta t = 2700°C - 20°C \approx 2700°C$ — изменение ее температуры при остывании. Отсюда получаем:

$$\tau = \frac{cm\Delta t}{N} \approx 5 \times 10^{-3}\text{с}$$

Теперь рассмотрим варианты, как могли бы соотноситься между собой времена τ и T (период колебаний потребляемой мощности).

1. Если бы τ было много меньше T, это бы означало, что нить не обладает практически никакой тепловой инерционностью и чувствует любые изменения напряжения. В таком случае можно было бы смело сказать, что лампа ощутимо мигает и гаснет каждый раз, когда питающее напряжение обращается в ноль.

2. Другой предельный случай — τ много больше T. Тогда нить остывала бы настолько медленно, что напряжение успело бы несколько раз сменить знак, а температура нити за время T не сильно изменилась, даже если бы напряжение и вовсе выключили. Этот случай соответствует большой тепловой инерционности. Лампа в этом случае практически не мигает. (Здесь под «много больше» и «много меньше» имеется в виду различие как минимум на порядок).

3. Последний вариант отвечает ситуации, когда τ и T одного порядка по величине. Именно такими оказались эти времена в нашем случае, когда $\tau = T/2$. В действительности это означает, что лампа чувствует изменение напряжения, но не успевает погаснуть полностью из-за своей тепловой инерционности. Лампа заметно мерцает, но при этом не гаснет до нуля.

Задача №9.

Число ударов молекул газа о стенку сосуда единичной площади в единицу времени прямо пропорционально концентрации этих молекул n и средней скорости их теплового движения v:

$$N \sim nv$$

Средняя скорость теплового движения зависит только от массы молекул и температуры. Если температура воздуха в комнате везде одинакова, то эта скорость тоже будет одинаковой для молекул, ударяющихся об пол и об потолок. Поэтому относительная разность числа ударов в такой ситуации просто равна относительной разности концентраций молекул у пола и у потолка:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta n}{n}.$$

С другой стороны, давление газа $p = nkT \sim n$ (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Значит, относительная разность концентраций равна относительной разности давлений:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta p}{p_0}.$$

Давление воздуха у потолка чуть-чуть меньше давления у пола, поэтому число ударов молекул об потолок меньше, чем об пол. Разность этих давлений может быть найдена по «гидростатической» формуле $\Delta p = \rho g h$, потому что плотность воздуха очень слабо изменяется при подъеме от пола до потолка. Найти эту плотность можно с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp_0}{RT}.$$

Подставив это выражение в формулу для Δp и приняв для оценки высоту комнаты $h \sim 3$ м, а температуру в ней $T \sim 300$ K , окончательно получаем:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{Mgh}{RT} \approx 3 \times 10^{-4}$$

Числа ударов молекул об пол комнаты и об ее потолок отличаются всего лишь на 0,03%.

Задача №10.

а) На приведенном рисунке вертикальная линия $\lambda = 545$ нм пересекает красный и зеленый графики приблизительно в точке их пересечения — то есть нормированные отклики соответствующих колбочек на свет этой длины волны равны друг другу. Тогда отношение истинных (ненормированных) откликов равно отношению приведенных в тексте нормировочных коэффициентов:

$$x_r : x_g = 0,65 : 0,3 \approx 2,17.$$

б) Обозначим через **r** и **g** единичные возбуждения, соответственно, «красной» и «зеленой» колбочек (их интенсивность соответствует одному делению вертикальной оси на приведенном графике чувствительности). Вертикальная линия $\lambda = 564$ нм на этом графике (максимум чувствительности «красной» колбочки) пересекает красную кривую на высоте 20 делений, а зеленую — на высоте приблизительно 15 делений. Значит, монохроматический свет такой длины волны приводит к возбуждению глаза, которое может быть записано как линейная комбинация

$$\boldsymbol{R} = 20\boldsymbol{r} + 15\boldsymbol{g}$$

Аналогично находим, что зеленый монохроматический свет с $\lambda = 534$ нм (максимум чувствительности «зеленой» колбочки) приводит к возбуждению

$$\boldsymbol{G} = 17,5\boldsymbol{r} + 20\boldsymbol{g},$$

а желтый свет из п. а) ($\lambda = 545$ нм) дает возбуждение

$$\boldsymbol{Y} = 19\boldsymbol{r} + 19\boldsymbol{g}.$$

Для того, чтобы смесь красного и зеленого света, смешанных в отношении $x : y$, для глаза была неотличима от желтого, возбуждение $\boldsymbol{X} = x\boldsymbol{R} + y\boldsymbol{G}$

должно быть пропорционально $\boldsymbol{Y}$:

$$x\boldsymbol{R} + y\boldsymbol{G} = c\boldsymbol{Y}.$$

Подставив в это равенство $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{Y}$ и приравняв коэффициенты при базисных возбуждениях $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{g}$, получаем систему уравнений:

$$20x + 17,5y = 19c$$

$$15x + 20y = 19c$$

Из этой системы находим искомое отношение интенсивностей:

$$x : y = 1 : 2.$$

в) Согласно гипотезе, описанной в тексте, в случае протоаномалии «красная» кривая чувствительности смещена как единое целое на 10 нм в коротковолновую область. У такого наблюдателя всякий спектрально чистый сигнал вызывает тот же отклик «красных» колбочек, что и сигнал на 10 нм большей длины волны у нормального наблюдателя. При этом отклики «зеленых» колбочек в обоих случаях одинаковы. То есть, во всех формулах из п. б) коэффициенты перед $\boldsymbol{g}$ сохранятся, а коэффициенты перед $\boldsymbol{r}$ дадут пересечения красной кривой чувствительности со смещенными в длинноволновую область красным (574 нм), зеленым (544нм) и желтым (555нм). Тогда получим, что те же самые красный, зеленый и желтый из п. б) для глаза такого аномального трихромата соответствуют возбуждениям

$$\boldsymbol{R}_1 = 19,5\boldsymbol{r} + 15\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{G}_1 = 19\boldsymbol{r} + 20\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{Y}_1 = 19,5\boldsymbol{r} + 19\boldsymbol{g}.$$

Найденный красно-зеленый эквивалент желтого тогда принимает вид:

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{R}_1 + 2\boldsymbol{G}_1 = 57,5\boldsymbol{r} + 55\boldsymbol{g}.$$

Как видим, отношение интенсивностей возбуждения «красной» и «зеленой» колбочек в этом случае равно $57,5 : 55 \approx 1,045$. В случае желтого света ($\boldsymbol{Y}_1$) это отношение составляет $19,5 : 19 \approx 1,026$. Эти числа отличаются приблизительно на 2%, что заметно меньше необходимых для различения цветов 5%. Для такого аномального трихромата, как и для нормального, подобная красно-зеленая смесь будет неотличима от желтого света.

Аналогичные вычисления для случая дейтероаномалии дают

$$R_2 = 20\boldsymbol{r} + 18\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{G}_2 = 17,5\boldsymbol{r} + 19,5\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{Y}_2 = 19\boldsymbol{r} + 20\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{R}_2 + 2\boldsymbol{G}_2 = 55\boldsymbol{r} + 57\boldsymbol{g}.$$

Таким образом, для такого наблюдателя отношение возбуждений двух типов колбочек красно-зеленой смесью равно $55 : 57 \approx 0,965$, а для желтого света оно составляет $19 : 20 \approx 0,950$. Эти числа отличаются приблизительно на 1,5%. Такой аномальный трихромат также не сможет различить эти два света.