Решение задачи №1.

Впишите в следующее предложение какое-нибудь числительное (не цифрами, а словом или словами), чтобы предложение было верным.

`В этом предложении ________________ гласных букв.`

Решение. Подойдут, например, слова `тринадцать` и `четырнадцать`.

Решение задачи №2.

Илья совершенно не любит задачи на скорость и не помнит ни одной формулы. Когда его спросили, какое расстояние проедет поезд, он попробовал и перемножить данные скорость и время, и сложить их, и даже поделить скорость на время. «У меня всегда получается одно и то же число! Наверное это и есть правильный ответ!» — воскликнул Илья. Докажите, что выполнять арифметические действия Илья тоже не умеет.

Решение. Предположим противное, т.е. предположим, что могут найтись такие скорость и время, что их сумма, произведение и результат деления скорости на время, равны.

Для начала взглянем на условие, что равны произведение скорости на время и результат деления скорости на время:

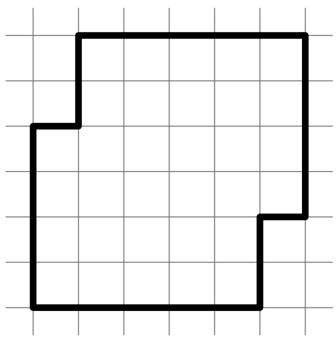
- если бы время было больше 1, то при умножении скорости на время, получилось бы число, большее данной скорости, а при делении скорости на время — меньшее;
- если бы время было меньше 1, то при умножении скорости на время, получилось бы число, меньшее данной скорости, а при делении скорости на время — большее.

Следовательно, если у Ильи и могло так получится, что равны произведение скорости на время и результат деления скорости на время, то только в случае, когда время равно 1.

Но тогда точно будут не равны сумма скорости и времени: если умножить скорость на 1, то она не изменится, а если прибавить 1 — увеличится. Противоречие. Значит, наше предложение неверно и Илья выполнять арифметические операции не умеет.

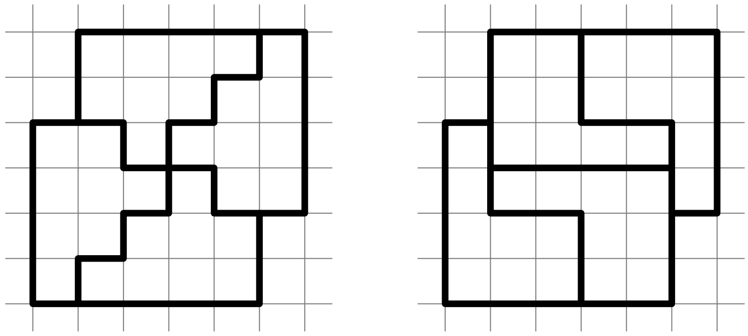
Решение задачи №3.

Можно ли разрезать по границам клеток фигуру на рисунке на 4 одинаковые части?



Ответ. Да, можно.

Решение. Например так, как показано на рисунках ниже.



Комментарий. Имеются и другие варианты разрезания.

Решение задачи №4.

На конференции присутствовали представители двух конкурирующих фирм "Индекс" и "Зугл" Алексей, Борис и Владимир. Представители одной и той же компании всегда говорят правду друг другу и врут конкурентам. Алексей сказал Борису: «Я из фирмы "Индекс"». Борис ответил: «О! Вы с Владимиром работаете в одной фирме!». Можно ли по этому диалогу определить, где работает Владимир?

Ответ. Да, можно.

Решение. Разберём два случая: Алексей и Борис работают или в одной компании, или в разных.

В первом случае Алексей сказал Борису правду, т.е. Алексей действительно работает в фирме "Индекс". Но и Борис тогда сказал правду, т.е. Владимир и Алексей оба работают в фирме "Индекс".

Во втором случае Алексей соврал Борису, т.е. Алексей на самом деле работает в фирме "Зугл". Но тогда и Борис соврал, т.е. Владимир и Алексей работают в разных фирмах. Поскольку Алексей работает в фирме "Зугл", то Владимир тогда работает в фирме "Индекс".

Итак, в любом случае, Владимир работает в фирме "Индекс".

Решение задачи №5.

В парке два года проводили озеленительные работы: спиливали старые и сажали новые деревья. Руководители проекта заявляют, что за два года средний прирост количества деревьев составляет 15 %. Экологи говорят, что за два года количество деревьев уменьшилось на 10 %. Может ли и то и другое быть правдой? (Если количество деревьев за год увеличилось, то прирост считается положительным, если уменьшилось — то отрицательным. Средний прирост за два года руководители вычисляют как $(a + b)/2$, где a прирост за первый год, b — за второй.)

Ответ. Да, может.

Решение. Пусть за первый год количество деревьев увеличилось на 80%, а во второй — уменьшилось на 50%. Тогда за два года, количество деревьев изменилось в $1{,}80 \cdot 0{,}50 = 0{,}90$ раз, т.е. как раз уменьшилось на 10%. При это средний прирост действительно составил $\frac{80\%+(-50\%)}{2} = 15\%$.

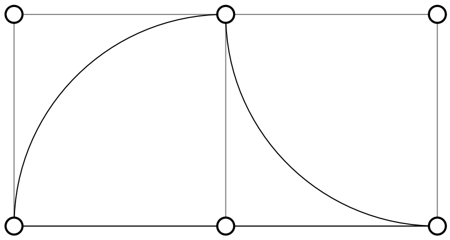
Комментарий. 80% и -50% — единственные возможные приросты, подходящие под условие задачи. Действительно, пусть в один год прирост равнялся $a\%$, а в другой — $b\%$. Из условия задачи тогда следует, что $\frac{a+b}{2} = 15$, а $\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right) = 0{,}90$.

После некоторых преобразований, получаем, что тогда $a + b = 30$, а $ab = -4000$. Но тогда по теореме Виета числа a и b суть корни квадратного уравнения $t^2 - 30t - 4000 = 0$, т.е. -50

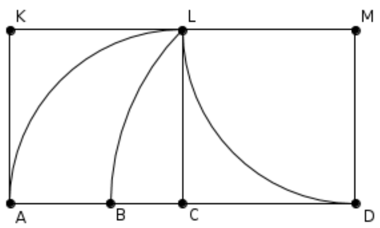
и 80 в некотором порядке.

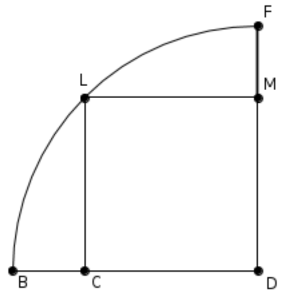
Решение задачи №6.

Требуется разделить криволинейный треугольник на рисунке на 2 части одинаковой площади, проведя одну линию циркулем. Это можно сделать, выбрав в качестве центра одну из отмеченных точек и проводя дугу через другую отмеченную точку. Найдите способ это сделать и докажите, что он подходит.



Ответ. С центром в точке D, проходящая через точку L (см. рисунок слева-снизу).





Решение. Не умаляя общности, можно считать, что сторона квадрата равна 1. Заметим, что исходный криволинейный треугольник состоит из двух частей, из которых можно сложить квадрат со стороной 1. Поэтому нам достаточно доказать, что площадь любой из двух частей на рисунке выше, равна 1/2.

Самое сложное — посчитать площадь криволинейного треугольника BLC (см. рисунок слева-сверху). Для этого давайте посмотрим на картинку справа-сверху. Из неё легко видеть, что площадь криволинейного треугольника BLC равняется $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{4} - 1\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Но тогда площадь криволинейного треугольника ALB (см. рисунок слева-сверху) равняется $\frac{\pi\cdot 1^2}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, что и требовалось.

Решение задачи №7.

Акции фирмы “Рога и копыта” каждый день меняют свою стоимость: поочерёдно то дорожают в a раз, то дешевеют на b рублей. Их стоимость уже трижды была равна N рублей. Докажите, что рано или поздно она примет это значение и в четвёртый раз.

Первое решение. Пусть начальная стоимость акций составляет c_0 рублей, а после i-го дня она равна c_i рублей ($i = 1, 2, \ldots$).

Предположим, что $c_2 > c_0$. Тогда $c_3 = ac_2 > ac_0 = c_1$ и $c_4 = ac_2 - b > ac_0 - b = c_2$. Отсюда $c_1 < c_3 < c_5 < \ldots$ и $c_0 < c_2 < c_4 < \ldots$. Любое значение (в частности, c) появляется в каждой из двух цепочек не больше одного раза, поэтому всего не больше двух раз — противоречие с условием. Аналогично — если $c_2 < c_0$.

Значит, $c_2 = c_0$, но тогда все значения с чётными индексами равны, так же как и все значения с нечётными индексами.

Второе решение. Аналогично первому решению введём последовательность цен акций. По условию, существует хотя бы три индекса k, ℓ, m такие, что $c_k = c_\ell = c_m = c$.

Из чисел k, ℓ, m хотя бы два одной чётности; пусть это k и ℓ, причём $k < \ell$. Осталось заметить, что тогда $c_{k+1} = c_{\ell+1}$ (в силу одинаковой чётности k и ℓ для получения c_{k+1} и $c_{\ell+1}$ мы с c_k и c_ℓ проделываем одно и то же действие), $c_{k+2} = c_{\ell+2}, \ldots, c_\ell = c_{2\ell-k}, \ldots, c_{2\ell-k} = c_{3\ell-2k}$, откуда $c_{2\ell-k} = c_{3\ell-2k} = c$. Хотя бы одно из чисел $2\ell - k$ и $3\ell - k$ отлично от m, что завершает доказательство.

Комментарий. Второе решение можно описать так: для получения c_ℓ из c_k мы проделали какой-то набор действий. Но теперь мы из того же самого числа ($c_k = c_\ell = c$) проделывается тот же самый набор действий (поскольку k и ℓ одной чётности); поэтому мы опять получим то же самое число.

Решение задачи №8.

В доме $8N$ этажей. В подъезде два лифта, в каждом из которых кнопки расположены в виде прямоугольника $N \times 8$ (N строк, 8 столбцов), но пронумерованы по-разному: в одном «слева направо, снизу вверх», а в другом «снизу вверх, слева направо» (пример для $N = 3$ см. на рисунке). Даня нажимает кнопку своего этажа, не глядя на нумерацию, потому что эта кнопка в обоих лифтах расположена на одном и том же месте. На каком этаже он может жить? (Например, для $N = 3$ ответ 1 и 24. Требуется найти все возможные варианты в зависимости от N.)

17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

3	6	9	12	15	18	21	24
2	5	8	11	14	17	20	23
1	4	7	10	13	16	19	22

Ответ. Если $N - 1$ не делится на 7, то только на 1-м и на последнем, если $N - 1$ делится на 7, то на любом из этажей с номером вида $\frac{(8N-1)y}{7} + 1$, где $y \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.

Решение. Пронумеруем столбцы кнопок числами от 0 до 7 слева-направо, а строки — числами от 0 до $N - 1$ снизу вверх. Тогда кнопка, находящаяся на пересечении x-й строки и y-го столбца в первом лифте будет иметь номер $8x + y + 1$, а во втором — $Ny + x + 1$. Следовательно, если в первом и во втором лифте на этой кнопке написан номер одного и того же этажа, то $8x + y = Ny + x$.

Преобразуем полученное уравнение в вид $7x = (N - 1)y$. Тогда, если $N - 1$ не делится на 7, то y делится на 7, но тогда либо $y = 0$, либо $y = 7$. В первом случае получаем $x = 0$, во втором случае получаем $x = N - 1$, т.е. Даня живёт или на первом, или на последнем этаже.

Пусть теперь $N - 1$ делится на 7. Тогда для каждого y от 0 до 7, мы можем вычислить $x = \frac{(N-1)}{7} y$. Т.е. Даня может жить на $8\frac{(N-1)}{7}y + y + 1 = \frac{(8N-1)y}{7} + 1$-м этаже, где $y \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.