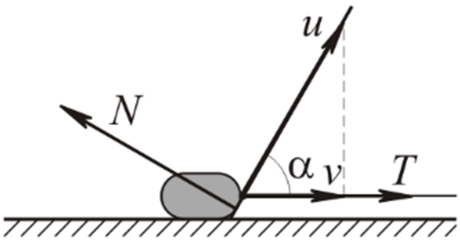
Решение задачи 1.



Поскольку удар мешка о доску, очевидно, абсолютно неупругий, его скорость после удара u будет направлена вдоль доски. С другой стороны, поскольку веревка нерастяжима, проекция скорости мешка на направление веревки должна быть по-прежнему равна v. Поэтому

$$u = \frac{v}{\cos\alpha}$$

Найдем теперь работу, совершенную во время удара силой натяжения веревки. На мешок в этот момент действуют сила нормальной реакции доски N и сила натяжения T (сила тяжести и сила реакции горизонтальной плоскости малы по сравнению с ними и их можно не учитывать). Рассмотрим малый промежуток времени Δt_i. Обозначим через N_i и T_i силы, действующие на мешок в этот момент. По закону сохранения импульса (в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления)

$$\sum_i (T_i - N_i \sin\alpha)\Delta t_i = 0$$

$$\sum_i N_i \cos\alpha \Delta t_i = mu\sin\alpha$$

Исключив из этих уравнений $\sum\limits_i N_i\Delta t_i$, найдем полный импульс силы T :

$$\sum_i T_i\Delta t_i = mu\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = mvtg^2\alpha$$

Проекция перемещения мешка на направление силы T за время Δt_i равна $v\Delta t_i$ (веревку продолжают тянуть с прежней скоростью). Поэтому полная работа, совершенная силой T за время удара, равна

$$A = \sum_i T_i v\Delta t_i = v\sum_i T_i\Delta t_i = mv^2 tg^2\alpha$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + A = \frac{mu^2}{2} + Q$$

после несложных преобразований находим количество выделившегося при ударе тепла:

$$Q = \frac{1}{2}mv^2 tg^2\alpha$$

Решение задачи 2.

Посмотрим, что происходит в момент старта транспортного средства. Для этого перейдем в неинерциальную систему отсчета, которая движется с ускорением машины/мотоцикла. Транспортное средство «встанет на дыбы» (его передние колеса оторвутся от земли), если опрокидывающий его момент силы инерции (относительно нижней точки заднего колеса) превысит момент силы тяжести (относительно той же точки). Момент силы тяжести равен mgl, где l – расстояние по горизонтали от заднего колеса до центра тяжести автомобиля или мотоцикла. Сила инерции равна ma, где a – ускорение транспортного средства, и приложена также в центре тяжести. Момент этой силы равен mah, где h – высота центра тяжести. Приравняв моменты этих сил, находим нужное ускорение:

$$a = \frac{1}{h}g.$$

Для автомобиля расстояние l можно оценить как $\sim 1,5$ м. Колесная база (расстояние между осями передних и задних колес) автомобиля примерно 2,5 м, а его центр тяжести смещен вперед, потому что под капотом находится самый тяжелый агрегат – двигатель. Высоту центра тяжести h можно взять равной $\sim 0,5$ м – самые тяжелые части автомобиля расположены внизу, у днища. Легко видеть, что для автомобиля критическое ускорение оказывается равным

$$a_a \approx \frac{1,5}{0,5}g = 3g$$

Такую перегрузку испытывают космонавты во время старта ракеты, но никак не автомобилисты. Кроме того, такое ускорение требует коэффициента трения между колесами и дорогой никак не меньшего 3. Известно, что для почти всех твердых поверхностей этот коэффициент не превосходит единицы (для пары резина – асфальт его значение 0,5 – 0,7).

Колесную базу мотоцикла можно «на глаз» оценить как $\sim 1,5$ м. Его центр тяжести находится приблизительно посередине между колесами, то есть для него $l \approx 0,7$ м. Высота же центра тяжести у него существенно больше, чем у автомобиля – мотоциклист имеет гораздо более «высокую посадку», чем водитель автомобиля, а масса его тела порядка массы его транспортного средства. Разумной оценкой этой высоты является $h \approx 1$ м. Значит, в этом случае критическое ускорение составляет всего $a_м \approx 0,7g$, что вполне достижимо для спортивного мотоцикла.

В реальности мотоциклист, желающий поразить зрителей эффектным «подъёмом на дыбы», нагибается вперед и резко выпрямляется в момент старта, дергая мотоцикл вверх и назад. Нетрудно понять, зачем это нужно: во время торможения туловища при движении назад на мотоцикл действует сила, сообщающая дополнительный момент вращения. А это в свою очередь уменьшает необходимое для трюка ускорение. Понятно, что водителю автомобиля проделывать такие телодвижения совершенно бессмысленно – его масса как минимум на порядок меньше массы его транспортного средства, поэтому никакими «рывкам» он заметно повлиять на него не сможет.

Решение задачи 3.

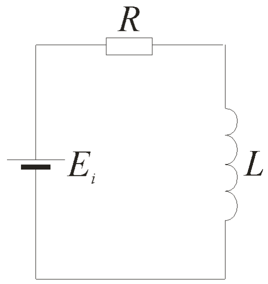
Посмотрим, что будет происходить в этой цепи после того, как магнит придет в движение. Начиная с этого момента ($t = 0$) в катушке будет действовать ЭДС индукции, равная

$$\mathrm{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Здесь Φ – поток магнитного поля магнита через катушку, знак «минус» поставлен потому, что этот поток уменьшается. В случае а) эта ЭДС будет постоянной и равной $\mathrm{E}_i = \frac{\Phi_0}{T}$. Кроме того, при изменениях тока в цепи I в катушке будет действовать ЭДС самоиндукции, равная

$$\mathrm{E}_s = L\frac{dI}{dt}.$$

Условно изобразив E_i в виде отдельного источника напряжения, получим эквивалентную схему цепи, показанную на рисунке. В этой цепи, очевидно, в любой момент ЭДС источника равна сумме ЭДС самоиндукции в катушке и напряжения на резисторе:



$$\mathrm{E}_i = L\frac{dI}{dt} + IR$$

(1) В начальный момент ток в цепи равен нулю, значит, в первые моменты (при малых t) он будет близким к нулю – ток в цепи, содержащей индуктивность, не может изменяться скачками. Поэтому вторым слагаемым в формуле (1) можно пренебречь (оно при таких t мало по сравнению с первым) и считать, что

$$\mathrm{E}_i = L\frac{dI}{dt}.$$

Отсюда получаем (для случая а), когда E_i постоянна), что ток в цепи в начальные моменты времени будет нарастать пропорционально t:

$$I(t) = \frac{\mathrm{E}_i}{L}t = \frac{\Phi_0}{LT}t.$$

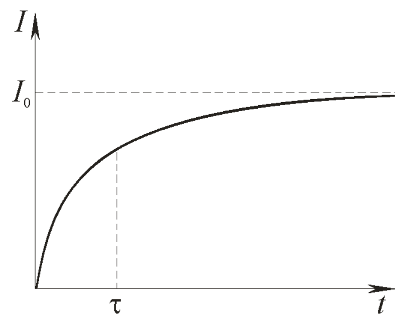
Если E_i непостоянна, закон изменения тока будет более сложным, но он в любом случае будет возрастать. Однако по мере его роста будет возрастать второе слагаемое в формуле (1), а значит, уменьшаться первое (их сумма равна E_i). Видно, что это приведет к уменьшению производной $\frac{dI}{dt}$ – скорость роста тока уменьшится. Но до тех пор, пока он все же растет, будет расти доля E_i, «достающаяся» резистору и уменьшаться – падающая на индуктивности. А значит, будет уменьшаться производная тока по времени. Легко понять, к чему это приведет через достаточно большое время. Ток достигнет такого значения, при котором величина IR сравняется с E_i, ЭДС самоиндукции обратится в ноль и в цепи будет течь постоянный ток

$$I_0 = \frac{\mathrm{E}_i}{R} = \frac{\Phi_0}{TR}.$$

Полученная нами качественная зависимость $I(t)$ показана на втором рисунке. Из нее понятно, в каком смысле можно говорить о «медленном» и «быстром» вытаскивании магнита. Если время вытаскивания T мало, можно считать, что все это время второе слагаемое в (1) было пренебрежимо мало по сравнению с первым, ток был мал и нарастал пропорционально t. Если же оно велико, можно считать, что почти все время вытаскивания первое слагаемое в (1) было мало по сравнению со вторым, в цепи протекал постоянный ток I_0, а переходный процесс его установления занял очень малую долю полного времени.

Чтобы получить количественный критерий, оценим «характерное время» переходного процесса τ. Из приведенных выше рассуждений понятно, что это время, за которое два слагаемых в формуле (1) становятся одного порядка величины:

$$L\frac{dI}{dt} \approx IR.$$



С другой стороны, производную тока по времени в этот момент можно оценить как $\frac{dI}{dt} \approx \frac{I}{\tau}$. Отсюда получаем:

$$\tau \approx \frac{L}{R}$$

Условие медленного вытаскивания: , быстрого – . Перейдем к вычислению работы по вытаскиванию магнита. По закону сохранения энергии эта работа (если не учитывать сообщение магниту кинетической энергии) в любом случае будет равна сумме тепла, выделившегося в резисторе за время вытаскивания, и энергии катушки индуктивности в конце этого процесса:

$$A = Q + W_L.$$

Энергия катушки тоже выделится в виде тепла на резисторе, однако произойдет это уже после вытаскивания магнита.

Найдем эти энергии для двух предельных случаев.

а) Магнит вытаскивают медленно, $T \approx \tau$. В этом случае ток в цепи почти все время равен I_0, поэтому

$$Q = I_0^2 RT, \qquad W_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

Оценим отношение этих энергий:

$$\frac{Q}{W_L} = \frac{2RT}{L} \approx \frac{T}{\tau} \approx 1$$

Как видим, энергией катушки в этом случае можно пренебречь и считать, что

$$A = Q = \frac{\Phi_0^2}{TR}$$

(мы подставили значение тока I_0).

б) Магнит вытаскивают быстро, $T \approx \tau$. В этом случае, как было показано выше, напряжением на резисторе в формуле (1) можно пренебречь и считать, что в любой момент

$$\mathrm{E}_i \approx -\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

то есть

$$\frac{d}{dt}(\Phi + LI) = 0.$$

Отсюда видно, что полный магнитный поток через катушку сохраняется: $\Phi + LI = const$ – при таком вытаскивании катушка ведет себя как сверхпроводящая. Приравняв значения этого потока в начале вытаскивания и в его конце

$$\Phi_0 = LI_K,$$

получаем ток в конце вытаскивания:

$$I_K = \frac{\Phi_0}{L}.$$

Найдем теперь Q и W_L:

$$Q \approx I_K^2 RT, \qquad W_L = \frac{LI_K^2}{2}$$

В этом случае ток в цепи изменялся во времени, причем по неизвестному закону (ЭДС индукции была непостоянной, вообще говоря), поэтому Q можно лишь оценить как произведение конечной тепловой мощности на время вытаскивания. Отношение этих энергий

$$\frac{Q}{W} \approx \frac{RT}{L} = \frac{T}{\tau} \approx 1$$

Как видим, в этом случае можно пренебречь выделившимся в резисторе теплом и считать, что

$$A = W_L = \frac{\Phi_0^2}{2L}$$

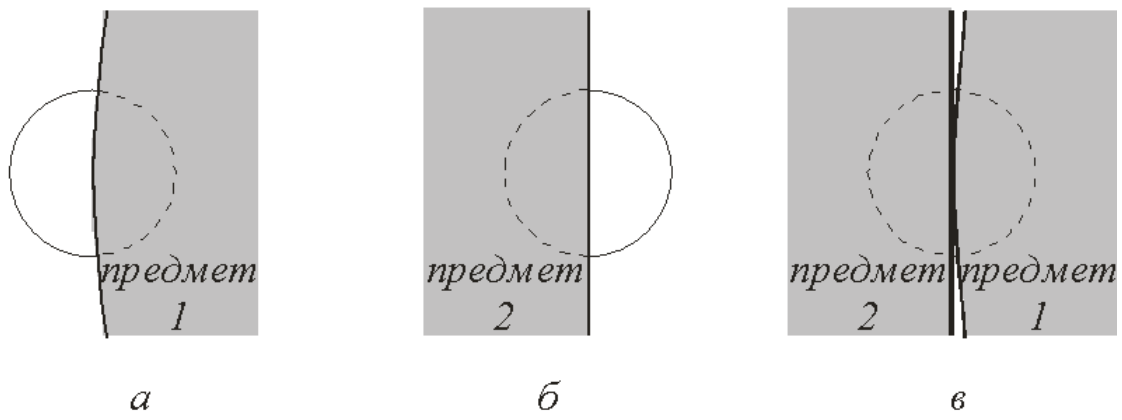
(если подставить значение конечного тока I_K).

В заключение приведем (без вывода) точную зависимость тока от времени (для постоянной E_i). Она может быть получена с помощью решения дифференциального уравнения, описывающего процессы в этой цепи и имеет вид:

$$I(t) = \frac{\mathrm{E}_i}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

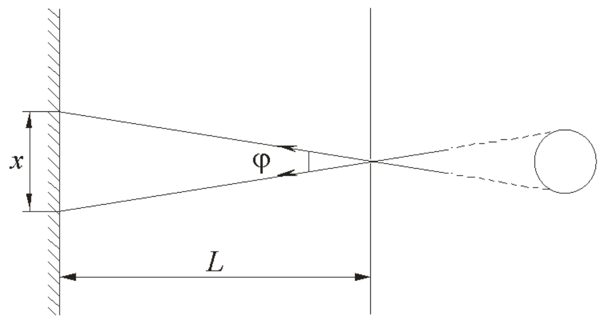
где $\tau = L/R$. Легко видеть, что наш качественный анализ вполне согласуется с точным решением.

Решение задачи 4.



Явление станет вполне понятным, если представить, что мы смотрим из некоторой точки экрана на солнечный диск, частично закрытый от нас предметами. Допустим, мы видим, что предмет 1 закрывает от нас примерно половину диска Солнца (*а*). Тогда точка, из которой мы наблюдаем, не лежит в тени этого предмета – она принадлежит его полутени (области экрана, которую Солнце освещает, но не всеми своими точками). Аналогично, если предмет 2 также заслоняет половину солнечного диска (*б*), то мы находимся в полутени от этого предмета. Однако, если поставить на пути солнечных лучей оба предмета (*в*) – Солнце будет закрыто полностью, и мы окажемся в области полной тени. Отсюда понятно, что теневой мостик возникает тогда, когда предметы сдвигаются вплотную. Расстояние между их (их собственными) тенями на экране в этот момент находится из простого чертежа. Если L – расстояние между предметами и экраном, а φ – угловой размер солнечного диска, то, поскольку угол φ мал, искомое расстояние x

$$x \approx L\varphi = 200\text{см} \times \frac{\pi}{180} \times 0,5 \approx 1,74\text{см}$$



Решение задачи 5.

а) Полная энергия островка складывается из энергии взаимодействия электронов на заряженной наночастице и энергии этой частицы в поле затвора. Так как форма островка неизвестна, можно оценить энергию взаимодействия как энергию N электронов, расположенных на расстояниях порядка d друг от друга:

$$E_c = \frac{N^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}.$$

Тот же результат можно получить, считая, что емкость уединенного проводника

$$C = \varepsilon_0 d, \text{ а его энергия } E_c = \frac{(Ne)^2}{2C}.$$

Энергия частицы, связанная со внешним полем равна $E_v = -NeV$ (у электрона отрицательный заряд). Таким образом, полную энергию можно оценить как

$$E = \frac{N^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 d} - NeV.$$

б) Число электронов на островке система выбирает так, чтобы была минимальна ее энергия. Как мы показали, эта энергия как функция N – квадратный трехчлен. Его минимум можно найти с помощью производной или элементарным способом. Он достигается при

$$N_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 Vd}{e}$$

Однако это число, вообще говоря, не является целым. Равновесное количество электронов будет равно ближайшему к N_0 целому числу, то есть $N_- = [N_0]$, если $N_0 - [N_0] < 0,5$ или $N_+ = [N_0] + 1$, если $N_0 - [N_0] > 0,5$(квадратные скобки обозначают целую часть числа).

в) Легко видеть, что добавление одного электрона не изменит энергию островка при таких значениях V, при которых $N_- = N_+$, то есть N_0 является полуцелым числом:

$$\frac{2\pi\varepsilon_0 Vd}{e} = n + \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим:

$$V_n = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 d}(n + \frac{1}{2}).$$

г) Из полученной формулы для V_n следует, что при изменении потенциала островка проводимость устройства должна резко возрастать через каждые

$$\Delta V = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

На участке графика с наиболее "чистыми" изменениями (-0.6 – -0.5V) на 0.1В приходится двадцать пиков проводимости, что соответствует $\Delta V \approx 5$ мВ. Отсюда находим:

$$d = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 \Delta V} \approx 580\text{нм}$$

Заметим, что в энергии, записанной нами, используется потенциал наночастицы, в то время как на графике приведена зависимость проводимости от потенциала затвора. Строго говоря, они не равны друг другу, но потенциал наночастицы пропорционален потенциалу затвора (коэффициент пропорциональности зависит от геометрии системы). Так как затвор изготавливают для управления потенциалом частицы и воздействие затвора на частицу должно быть много сильнее воздействия других электродов, то коэффициент пропорциональности для оценки можно считать равным единице. Отрицательные значения потенциала на графике, видимо, связаны с принятыми в данной работе обозначениями.