Решение задачи 1.

Пусть сумма чисел $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ равна $\frac{a_n}{b_n}$, где a_n и b_n — взаимно простые числа. Верно ли, что $b_{n+1}>b_n$ при всех n?

Ответ: Нет.

Решение.

Рассмотрим первые несколько чисел:

$$\frac{a_1}{b_1}=1,\quad \frac{a_2}{b_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad \frac{a_3}{b_3}=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6},$$

$$\frac{a_4}{b_4}=\frac{11}{6}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12},\quad \frac{a_5}{b_5}=\frac{25}{12}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60},\quad \frac{a_6}{b_6}=\frac{137}{60}+\frac{1}{6}=\frac{147}{60}=\frac{49}{20}.$$

Таким образом, $b_5=60$, а $b_6=20$, то есть для $n=5$ не выполняется неравенство $b_{n+1}>b_n$.

Примечание. На самом деле существует бесконечно много чисел n, для которых не выполняется неравенство $b_{n+1}>b_n$ (см. https://www.turgor.ru/problems/28/index.php#turnir28oos, задача 6 в варианте 8–9 классов).

Решение задачи 2.

На плоскости нарисовано множество единичных окружностей так, что каждая прямая на плоскости пересекает хотя бы одну окружность. Обязательно ли найдётся прямая, пересекающая бесконечно много окружностей?

Ответ: Нет.

Решение.

Рассмотрим график функции $y=x^3$. В каждой точке этого графика, у которой хотя бы одна целая координата, нарисуем единичную окружность. Тогда круги, соответствующие нарисованным окружностям, полностью покрывают график функции $y=x^3$. Таким образом, каждая прямая на плоскости пересекает хотя бы одну окружность, поскольку каждая прямая на плоскости пересекает график функции $y=x^3$ (каждая прямая вида $y=kx+b$ имеет с графиком общую точку, поскольку кубическое уравнение $x^3=kx+b$ имеет корень, а каждая прямая вида $x=c$ пересекается с графиком в точке $(c;c^3)$).

Покажем, что никакая прямая не может пересекать бесконечно много окружностей. Рассмотрим прямую $ax+by+c=0$. Расстояние от точки $(x;x^3)$ до этой прямой равно $d(x)=\dfrac{|ax+bx^3+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Найдётся такое положительное число M, что при $x<-M$ функция $d(x)$ неограниченно убывает, а при $x>M$ неограниченно возрастает. Значит, существует $N>M$ такое, что при $|x|>N$ имеем $d(x)>1$. Таким образом, прямая $ax+by+c=0$ может пересекать только те окружности, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-N\leqslant x\leqslant N$. Но таких окружностей конечное число.

Решение задачи 3.

Две непересекающиеся окружности радиусами 1 и 3 вписаны в угол POQ, где P — точка касания стороны угла с первой окружностью, а Q — точка касания другой стороны угла со второй окружностью. Общая внутренняя касательная окружностей AB пересекает луч OP в точке A, а отрезок OQ в точке B. Найдите AB, если $OP = 3$.

Ответ: 6.

Решение.

Пусть первая окружность касается отрезка OQ в точке P', а вторая окружность касается луча OP в точке Q', прямая AB касается первой окружности в точке X, а второй в точке Y. Тогда из равенства отрезков касательных получаем:

$$AX = AP, \qquad BY = BQ, \qquad BX = BP', \qquad AY = AQ';$$

$$2AB = AX + XB + AY + YB = AP + P'B + AQ' + BQ = PQ + P'Q' = 2PQ',$$

откуда $AB = PQ'$.

Обозначим центры окружностей через C и D соответственно. Прямоугольные треугольники $OQ'D$ и OPC подобны с коэффициентом $\dfrac{Q'D}{PC} = 3$,
поэтому $OQ' = 3OP = 9$, откуда $AB = PQ' = OQ' - OP = 6$.

Решение задачи 4.

Уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + p\{x\} + q = 0$ имеют 1 и 2 корня соответственно. Докажите, что $q < 1$.
(Через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа — число из полуинтервала $[0; 1)$ такое, что число $x - \{x\}$ — целое.)

Доказательство.

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет один корень, поэтому $q \geqslant 0$ и $p = 2\sqrt{q}$ или $p = -2\sqrt{q}$. Кроме того $q > 0$, поскольку при $q = 0$ второе уравнение принимает вид $x^2 = 0$ и имеет только один корень.

Поскольку $x^2 \geqslant 0$, $\{x\} \geqslant 0$, $q > 0$, получаем $p < 0$, иначе уравнение $x^2+p\{x\}+q = 0$ не имеет корней. Таким образом, $p = -2\sqrt{q}$.

Преобразуем второе уравнение:

$$x^2 - 2\sqrt{q}\{x\} + q = 0; \quad x^2 - 2\sqrt{q}x + 2\sqrt{q}[x] + q = 0;$$

$$x^2 - 2\sqrt{q}x + q = -2\sqrt{q}[x]; \quad (x - \sqrt{q})^2 = -2\sqrt{q}[x].$$

Заметим, что $-2\sqrt{q}[x] \geqslant 0$, а значит, $[x] \leqslant 0$, то есть все корни второго уравнения меньше 1.

Если $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$. Получаем

$$(x - \sqrt{q})^2 = 0,$$

откуда $x = \sqrt{q}$, $0 < \sqrt{q} = x < 1$, а значит, в этом случае $0 < q < 1$.

Если $x < 0$, то $[x] < 0$. Поскольку $(x - \sqrt{q})^2 \geqslant -4x\sqrt{q}$, получаем $-4x\sqrt{q} \leqslant -2\sqrt{q}[x]$, откуда $2x \geqslant [x]$. Последнее неравенство не может выполняться при $x < -1$. Значит, $-1 \leqslant x < 0$ и $[x] = -1$. Таким образом, $(x-\sqrt{q})^2 = 2\sqrt{q}$, откуда $x^2-2\sqrt{q}x+q-2\sqrt{q} = 0$. Вершина параболы $y = x^2 - 2\sqrt{q}x + q - 2\sqrt{q}$ имеет координаты $(\sqrt{q}, -2\sqrt{q})$. Значит, получившееся квадратное уравнение не может иметь два отрицательных корня. Таким образом, уравнение $(x-\sqrt{q})^2 = -2\sqrt{q}[x]$ должно иметь хотя бы один положительный корень, а ранее было доказано, что это возможно, только если $0 < q < 1$.

Решение задачи 5.

На координатной плоскости нарисован треугольник с вершинами в точках с целочисленными координатами. Известно, что внутри этого треугольника находится ровно одна точка с целочисленными координатами. Какое наибольшее количество точек с целочисленными координатами (не считая вершин) может лежать на сторонах этого треугольника?

Ответ: 6.

Решение.

На сторонах треугольника, вершины которого имеют координаты $(0;0)$, $(3;0)$ и $(0;3)$, лежит шесть точек с целыми координатами, а внутри ровно одна. Покажем, что на сторонах треугольника не может лежать больше точек с целыми координатами.

Если на каждой стороне треугольника лежит не больше двух точек с целыми координатами, то общее количество точек с целыми координатами, лежащих на сторонах, не превосходит 6. Предположим, что на стороне AB треугольника ABC лежит n точек с целыми координатами и $n > 2$, а внутри этого треугольника лежит ровно одна точка O с целыми координатами. Пусть прямые AB и CO пересекаются в точке M, а прямая, параллельная AB и проходящая через точку O, пересекает стороны AC и BC в точках A' и B' соответственно. Треугольники ABC и $A'B'C$ подобны, поэтому $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{CO}{CM}$. С одной стороны, $\dfrac{CO}{CM} \geqslant \dfrac{1}{2}$, иначе внутри отрезка OM найдётся точка с целыми координатами. С другой стороны, $OA' \leqslant \dfrac{AB}{n+1}$, $OB' \leqslant \dfrac{AB}{n+1}$, иначе точка с целыми координатами найдётся внутри отрезка OA' или OB'. Получаем:

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{CO}{CM} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O + OB'}{AB} \leqslant \frac{2}{n+1},$$

откуда $n \leqslant 3$.

Если $n = 3$, то $\dfrac{CO}{CM} = \dfrac{1}{2}$, $OA' = \dfrac{AB}{4}$, $OB' = \dfrac{AB}{4}$. То есть точки $A'B'$ — средняя линия треугольника ABC, а точки A', B' и M имеют целые координаты. Пусть на одной из сторон AC или BC найдётся точка с целыми координатами, отличная от середины. В этом случае на этой стороне лежит не менее трёх точек с целыми координатами. При этом ранее было показано, что таких точек не более трёх, а если точек три, то средняя линия, параллельная стороне проходит через точку O. Но две средние линии треугольника не могут пересекаться во внутренней точке. Значит, на сторонах AC и BC находится по одной точке с целыми координатами, а всего на сторонах треугольника находится пять точек с целыми координатами.

Таким образом, если на какой-то стороне треугольника находится больше двух точек с целыми координатами, то на сторонах треугольника находится меньше шести точек с целыми координатами.